

(00)

Συμειώσεις στο μάθημα:

Ειδικά θέματα Γεωμετρίας (ΜΑΕ 822)

Ακαδημαϊκό έτος 2017 - 2018

Εαρινό εξάμηνο.

Τρίτο μέρος

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τμήμα Μαθηματικών

Συγγραφέας: Γεώργιος Νίκος

Εισαγωγή (61)

Αυτό είναι το τρίτο και τελευταίο μέρος των συζητήσεων του μαθήματος.

Περιέχει τις πλήρεις αποδείξεις των δύο κεντρικών αποτελεσμάτων του μαθήματος.

Του θεωρήματος του Stokes και του λήμματος του Poincaré.

Πρόκειται για δύο κεντρικά και θιγόντα αποτελέσματα των μαθηματικών με πολλές εφαρμογές.

Το θεώρημα του Stokes καλείται κάποιες φορές και θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού και είναι το γνωστό μας δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού στην μια διάσταση. Να συζητήσουμε επίσης ότι το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού παίζει κεντρικό ρόλο στην απόδειξη και των δύο παραπάνω αποτελεσμάτων.

(02).

Έτσι, το Θεώρημα του Stokes είναι το ανάλογο του 2^{ου} Θεμελιώδους Θεωρήματος του ανειροδτικού λογισμού, στις πολλές διαστάσεις.

Εμείς εδώ αποδεικνύουμε μια αφηρημένη μορφή του Θεωρήματος του Stokes.

Οι αποδείξεις και των δύο Θεωρημάτων είναι εντός της ελεγχόμενης ύλης.

Γενικά όλες οι αποδείξεις σε αυτές τις σημειώσεις (όπως και στο δεύτερο μέρος των σημειώσεων) είναι εντός της ελεγχόμενης ύλης.

Και αυτό λόγω της μεγάλης πολυπλοκότητας και ευχέρειας τους.

Συμπεριλήφθηκε όμως τις πλήρεις αποδείξεις αυτών των Θεωρημάτων για όποιον ενδιαφέρεται να εμβαθύνει σε αυτά τα θέματα.

Να σημειώσουμε ότι οι αποδείξεις των Θεωρημάτων αυτών στο βιβλίο του ~~Stokes~~ Spivak, §6^ο ο οποίος και βασιστήκαμε) είναι εξαιρετικά σωστές.

(03)

Είναι το σύνθετο, σε βιβλία προχωρημένου
λογισμού οι συγγραφείς να είναι βωοηγοί
στις αποδείξεις, μιας και υποθέτουν ότι
ο υποψήφιος αναγνώστης που θα έχει το
ενδιαφέρον να μελετήσει τις αποδείξεις των
διαφόρων προτάσεων είναι ελκυστικός και εύκολο
μπορεί να καλύψει μόνος του τα μέρη των
αποδείξεων που δεν αποδεικνύονται στο κείμενο.
Επειδή όμως εδώ πρόκειται για φοιτητές
συνμεσείς, υποθέτουμε ότι ένας φοιτητής δεν
έχει γενικά την απαιτούμενη ωριμότητα για να
παράνοιασθεί τις αποδείξεις.
Γι' αυτό τον λόγο συστημάσθαι εδώ τις
ημέρες και βδομάδες αποδείξεις των
θεωρημάτων, ώστε ο φοιτητής που ενδιαφέρεται
να τις μελετήσει, να μπορεί να τις παράνοιασθεί
με άνεση. Φυσικά, όπως είπαμε όμως, όλες οι
αποδείξεις των θεωρημάτων είναι επίσης εξεταστέες
όλως.

(64)

Τώρα όσον αφορά την εξέταση ύλης της
της ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ: (από αυτό εδώ το τρίτο μέρος

των σημειώσεων).

1) Από τις σελίδες 1-85 το μόνο
εντός εξέτασης ύλης είναι το θεωρήμα

του Stokes, θεωρήμα 2.2.22 σελίδα 52,

μόνο η επιφάνεια του θεωρήματος

Γεννοείται η απόδειξη είναι επίσης

Διηλεκτική θα πρέπει (υπονοείται) να διαβάσετε τους
ορισμούς για να κατανοήσετε τι λέει το θεωρήμα
του Stokes. Σε υψηλή περίπτωση όμως δεν

θα σας ζητηθούν να εξετάσετε οι διάφοροι ορισμοί που
αναπτύσσονται για να διατυπωθεί το θεωρήμα του Stokes
και ούτε θα χρειαστούν να θυμάστε τυχόν ασκήσεις
που αφορούν ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

(05)

Η μοναδική απόδειξη εντός της από το τρίτο
μέρος των συλλογών είναι η απόδειξη του
λήμματος 2.2.28, στην σελίδα 87 των συλλογών
που είναι 5 μόνο γραμμές.

Από την σελίδα 86 έως το τέλος είναι
όλη εντός επισημειώνων, εντός βιβλίου
από τις απόδειξες των προτάσεων και των
λήμμάτων (εξαιρείται όπως είπαμε το λήμμα
2.2.28).

Να προσεχθεί ιδιαίτερα η εφαρμογή 2.2.36
στην σελίδα 133-143 των συλλογών, το
οποίο θεωρείται υποχρόνιο υπολογιστικό θέμα
για τη εξέταση.

Γωμετρική εισαγωγή ①

Θα ορίσουμε εδώ μια ένωση χώρων, διαφορετική από την συνήθη, η οποία θα μας βοηθήσει στην συνέχεια.

Ορισμός 2.2.1

Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Σε συνήθως γράφουμε:

$$[0, 1]^m = \underbrace{[0, 1] \times \dots \times [0, 1]}_{m\text{-φορές}} \quad \text{και} \quad [0, 1]^1 = [0, 1].$$

Θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ εφοδιασμένα με την συνήθη τοπολογία (μετρική) τους.

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma: [0, 1]^m \rightarrow A$ ονομάζεται **ιδιόμορφος m -κύβος** στο A .

Με $\mathbb{R}^0$ και $[0, 1]^0$ συμβολίζουμε το μονοσύνολο $\{0\}$.

Έτσι, ένας ιδιόμορφος 0 -κύβος στο A θα είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση (αυτοφυσική) είναι και συνεχής)

$$f: \{0\} \rightarrow A.$$

Οι ιδιόμορφες 1 -κύβοι ονομάζονται **υαλινότητες**.

Μια ιδιότητα αυτή, αλλά και ιδιότητα συνεχούς ορισμένης ιδιόμορφος n -κύβου στον $\mathbb{R}^n$ αποτελεί ο βασικός κύβος $I^n: [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ο οποίος ορίζεται με:

$$I^n(x) = x, \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1]^n.$$

(2)

Ορισμός 2.2.2

Έστω $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, και $\mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm 2, \dots\} \cup \{0\}$ να είναι το σύνολο των ακεραίων αριθμών. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Θα συμβολίζουμε με $S_m(A)$ το σύνολο όλων των ιδιοτήτων m -κύβων στο A .

Μια m -αλυσίδα στο A είναι μια συνάρτηση

$f: S_m(A) \rightarrow \mathbb{Z}$, τέτοια ώστε $f(x) = 0$ για όλα

τα $x \in S_m(A)$, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος το

πολύ (πεπερασμένο) σύνολο θεωρείται και το $\emptyset$).

Έχουμε τώρα την ετήρη πρόταση

Πρόταση 2.2.3

Έστω $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f, g: S_m(A) \rightarrow \mathbb{Z}$

να είναι δύο m -αλυσίδες στο A .

Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα της θεωρίας ανώτερων αποδείξεων,

ορίστηκε μια μοναδική συνάρτηση $\varphi: S_m(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ για την οποία ισχύει $\varphi(x) = f(x) + g(x)$, για κάθε $x \in S_m(A)$.

Συμβολίζουμε με $\varphi = f + g$ αυτή την μοναδική συνάρτηση.

Τότε η $f + g$ είναι μια m -αλυσίδα.

Απόδειξη

Θετουμε $S' := \{x \in S_m(A) \mid f(x) \neq 0 \text{ ή } g(x) \neq 0\}$

$S_f := \{x \in S_m(A) \mid f(x) \neq 0\}$ και

(3)

$S_g = \{x \in S_m(A) \mid g(x) \neq 0\}$. Προφανώς ισχύει ότι

$S' = S_f \cup S_g$ από τους ορισμούς των συνόλων S', S_f, S_g .

Ορίζουμε $S_{f+g} := \{x \in S_m(A) \mid (f+g)(x) \neq 0\}$.

Έστω $x \in S_{f+g}$. Τότε $(f+g)(x) \neq 0$ εἴς' ορισμό.

Αρα θα ισχύει ή ότι $f(x) \neq 0$ ή ότι $g(x) \neq 0$ γιατί
εάν ήταν $f(x) = g(x) = 0$, τότε $f(x) + g(x) = 0$, δηλαδή

$(f+g)(x) = \underbrace{f(x) + g(x)}_{\text{ορισμός}} = 0$ άτοπο. Αρα εάν

$f(x) \neq 0$, τότε $x \in S_f$ ενώ εάν $g(x) \neq 0$, τότε

$x \in S_g$. Αρα $S_{f+g} \subseteq S_f \cup S_g$ (1)

Αφού οι f, g είναι m -αλυσίδες, έπεται εἴς' ορισμό

(ή και m -αλυσίδας) ότι τα σύνολα S_f και S_g είναι

γενερασιζόμενα. Από την (1) έπεται ότι και το S_{f+g} είναι

γενερασιζόμενο, πράγμα που επιβεβαιώνει ότι η $f+g$ είναι μια

m -αλυσίδα στο A , ή και παίρνει τιμές στο $\mathbb{Z}$. ■

(4)

Έστω χώρος $u, w \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και f να είναι μία m -αλυσίδα στο A .

Έστω τυχόν $n \in \mathbb{Z}$.

Ορισμός 2.2.4

Αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το ερώτημα της θεωρίας ανώτατων ότι ορίζεται μία μοναδική συνάρτηση

$P: S_m(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ για την οποία ισχύει:

$P(x) = n \cdot f(x)$ για κάθε $x \in S_m(A)$,

Συμβολίζουμε αυτή την συνάρτηση με $P = n \cdot f$.

Παρόμοια με την πρόταση 2.23 έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 2.2.5

Η συνάρτηση $n \cdot f: S_m(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ που ορίσαμε παραπάνω είναι μία m -αλυσίδα.

Απόδειξη

Θέτουμε $S_{n \cdot f} = \{x \in S_m(A) \mid S_{n \cdot f}(x) \neq 0\}$.

Αν $n=0$, τότε βέβαια $(n \cdot f)(x) = n \cdot f(x) = 0 \cdot f(x) = 0$

για κάθε $x \in S_m(A)$ και άρα $S_{n \cdot f} = \emptyset$, που σημαίνει ότι $n \cdot f$ είναι m -αλυσίδα.

⑤
Έστω ότι $u \neq 0$, $u \in \mathbb{Z}$. Έστω

$x \in S_{u \cdot f}$. Τότε $(u \cdot f)(x) \neq 0$ εἰς ορισμόν. Αφού $u \neq 0$, ἐνέται ότι $f(x) \neq 0$ για να ήταν $f(x) = 0$, τότε θα είχαμε $(u \cdot f)(x) = u \cdot f(x) = u \cdot 0 = 0$ άτοπο.

Άρα αφού $f(x) \neq 0$, ἐνέται ότι $x \in S_f$. Άρα

$S_{u \cdot f} \subseteq S_f$ γιατί αφού u είναι m -αλυσίδα έχουμε ότι το S_f είναι πεπερασμένο, και άρα από την (1) ἐνέται ότι και το $S_{u \cdot f}$ είναι πεπερασμένο και άρα u ή $u \cdot f$ είναι για m -αλυσίδα. ■

Έστω τώρα $u, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Θεωρούμε το σύνολο

$$\widetilde{S_m(A)} := \left\{ f: S_m(A) \rightarrow \mathbb{Z} \mid u \cdot f \text{ είναι } m\text{-αλυσίδα} \right\}$$

όπου των m -αλυσίδων στο A .

Από την πρόταση 2.2.3 και χρησιμοποιώντας στοιχεία θεωρίας συνόλων αποδεικνύεται ότι ορίζεται για

$$\text{μοναδική συνάρτηση } \phi: \widetilde{S_m(A)} \times \widetilde{S_m(A)} \rightarrow \widetilde{S_m(A)}$$

για την οποία ισχύει ότι.

⑥

$\phi((f,g))(x) = f(x) + g(x)$ για κάθε $x \in S_m(A)$
ή αλλιώς $\phi((f,g)) = f + g$ για κάθε

$(f,g) \in (\widetilde{S_m(A)})^2$. Αυτήν την μοναδική ϕ την συμβολίζουμε
με $\phi = +$ και είναι η πράξη στο $\widetilde{S_m(A)}$.

Από την πρόταση 2.2.5 και χρησιμοποιώντας βεβαιώς
θεωρία βέβαια αποδεικνύεται ότι ορίζεται μία μοναδική
συνάρτηση $\phi': \mathbb{Z} \times \widetilde{S_m(A)} \rightarrow \widetilde{S_m(A)}$ για

την οποία ισχύει ότι: $\phi'((n,f)) = n \cdot f$ για κάθε

$(n,f) \in \mathbb{Z} \times \widetilde{S_m(A)}$. Την συνάρτηση ϕ' την συμβολί-
ζουμε με: $\phi' = \cdot$ και την ονομάζουμε αριθμητικό
πολλαπλασιασμό στο $\widetilde{S_m(A)}$.

Έτσι ορίζεται μία δομή $(\widetilde{S_m(A)}, +, \cdot)$ με
πράξη και αριθμητικό πολλαπλασιασμό, οπότε κάποιος
θα μπορούσε να αναρωτηθεί εάν αυτή η δομή είναι
και διανυσματικός χώρος. Δεν μπορούμε να περιφραστείμε
από το γεγονός, γιατί το σύνολο των αριθμητικών τιμών
εδώ είναι το $\mathbb{Z}$ που δεν είναι σώμα, αλλά είναι
δακτύλιος, μεταθετικός με μοναδικό στοιχείο το 1.

Έχει η δομή αυτή ⁽⁷⁾ αληθινές παρόμοιες με τον
διαμορφωτικό χώρο ιδιοτήτες που την καθιστούν ένα
πρότυπο (models στα Αγγλικά).

Έτσι δίνουμε τον αφηρημένο ορισμό ενός προτύπου.

Ορισμός 2.2.6

Έστω M να είναι ένα σύνολο και δυο πράξεις:

$+$: $M \times M \rightarrow M$ και μία πράξη $\cdot$: $\mathbb{Z} \times M \rightarrow M$,

έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:

1) Η δομή $(M, +)$ είναι αβελιανή ομάδα

2) Ικανοποιούνται οι εξής 4 ιδιότητες:

(i) $z \cdot (u+v) = zu + zv$ για κάθε $z \in \mathbb{Z}$ και
για κάθε $u, v \in M$

(ii) $(z+s) \cdot u = zu + su$ για κάθε $z, s \in \mathbb{Z}$ και
για κάθε $u \in M$

(iii) $(z \cdot s) \cdot u = z \cdot (s \cdot u)$ για κάθε $z, s \in \mathbb{Z}$ και για
κάθε $u \in M$.

iv) $1 \cdot u = u$ για κάθε $u \in M$.

Όταν ικανοποιούνται όλες οι παραπάνω ιδιότητες
τότε η δομή $(M, +, \cdot)$ ονομάζεται $\mathbb{Z}$ -πρότυπο.

(8)

Με βάση του παραπάνω ορισμό ισχύει τώρα η εξής πρόταση

Πρόταση 2.2.7

Η δομή $(\widetilde{S_m(A)}, +, \cdot)$ είναι ένα $\mathbb{Z}$ -μόνιο.

Απόδειξη

Έστω $f, g \in \widetilde{S_m(A)}$. Για $x \in S_m(A)$ έχουμε:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$ για κάθε $x \in S_m(A)$. Άρα $f+g = g+f$ και η πρόταση είναι μεταθετική.

Έστω $f, g, h \in \widetilde{S_m(A)}$. Έχουμε: για $x \in S_m(A)$

$$\begin{aligned} ((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g+h)(x) = \\ &= (f+(g+h))(x) \text{ για κάθε } x \in S_m(A). \text{ Άρα,} \end{aligned}$$

$(f+g)+h = f+(g+h)$, για κάθε $f, g, h \in \widetilde{S_m(A)}$ και έτσι η $+$ είναι προσεταιριστική.

Θεωρούμε τον ομομορφισμό $\Phi: \widetilde{S_m(A)} \rightarrow \mathbb{Z}$ με τρόπο:

$\Phi(x) = 0 \in \mathbb{Z}$ για κάθε $x \in \widetilde{S_m(A)}$. Προφανώς ισχύει ότι $\Phi \in \widetilde{S_m(A)}$ και

9

Για $f \in \widetilde{S_m(A)}$ έχουμε για $x \in S_m(A)$

$$(f + \emptyset)(x) = f(x) + \emptyset(x) = f(x) + 0 = f(x), \text{ για κάθε}$$

$x \in S_m(A)$ και άρα $f + \emptyset = f$. Άρα μετὰ προστίθεται η $\emptyset$ στην $S_m(A)$ και έχουμε $\emptyset + f = f + \emptyset = f$, για κάθε $f \in \widetilde{S_m(A)}$.

Άρα η $\emptyset$ είναι ουδέτερο ως προς την πρόσθεση.

Έστω τώρα στοιχείο $f \in S_m(A)$. Ορίζουμε την

συνάρτηση $-f: S_m(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ με τον:

$$(-f)(x) = -f(x), \text{ για κάθε } x \in S_m(A).$$

Αν $S_f := \{x \in S_m(A) \mid f(x) \neq 0\}$ και

$$S_{-f} = \{x \in S_m(A) \mid (-f)(x) \neq 0\} \text{ είναι άμεσο ότι:}$$

$S_f = S_{-f}$ και επειδή $f \in \widetilde{S_m(A)}$ έχουμε και ότι:

$$-f \in \widetilde{S_m(A)} \text{ και ότι } f + (-f) = (-f) + f = \emptyset.$$

Άρα κάθε $f \in \widetilde{S_m(A)}$ έχει αντίθετο στοιχείο το $-f$ ως προς την πρόσθεση και άρα η δομή

$(\widetilde{S_m(A)}, +)$ δείχνει ότι είναι αβελιανή ομάδα.

(20)

i) Έστω τώρα $n \in \mathbb{Z}$ και $f, g \in \widetilde{S_m(A)}$.

Έστω $x \in S_m(A)$. Έχουμε:

$$(n \cdot (f+g))(x) = n \cdot (f+g)(x) = n \cdot (f(x) + g(x)) =$$

$$= n \cdot f(x) + n \cdot g(x) = (n \cdot f)(x) + (n \cdot g)(x) = (n \cdot f + n \cdot g)(x) \text{ για}$$

$$n \cdot g \in \widetilde{S_m(A)}. \text{ Άρα: } n \cdot (f+g) = n \cdot f + n \cdot g \text{ για } n \cdot g \in$$

$$n \in \mathbb{Z} \text{ και για } n \cdot g \in \widetilde{S_m(A)}.$$

ii) Έστω $n, m \in \mathbb{Z}$ και $f \in \widetilde{S_m(A)}$. Έχουμε:

$$((n+m) \cdot f)(x) = (n+m) \cdot f(x) = n \cdot f(x) + m \cdot f(x) =$$

$$= (n \cdot f)(x) + (m \cdot f)(x) = (n \cdot f + m \cdot f)(x) \text{ για } n \cdot f \in \widetilde{S_m(A)}.$$

$$\text{Άρα } (n+m) \cdot f = n \cdot f + m \cdot f \text{ για } n \cdot f \in \widetilde{S_m(A)} \text{ και } m \cdot f \in \widetilde{S_m(A)}.$$

$$f \in \widetilde{S_m(A)}.$$

iii) Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και $f \in \widetilde{S_m(A)}$. Έστω $x \in S_m(A)$.

$$\text{Έχουμε: } ((n \cdot m) \cdot f)(x) = n \cdot m \cdot f(x) = n \cdot (m \cdot f(x)) =$$

$$= n \cdot (m \cdot f)(x) = (n \cdot (m \cdot f))(x) \text{ για } m \cdot f \in \widetilde{S_m(A)}. \text{ Άρα:}$$

$$(n \cdot m) \cdot f = n \cdot (m \cdot f) \text{ για } m \cdot f \in \widetilde{S_m(A)} \text{ και } n \cdot (m \cdot f) \in \widetilde{S_m(A)}.$$

iv) Έστω $f \in \widetilde{S_m(A)}$. Έχουμε:

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \text{ για } x \in S_m(A). \text{ Άρα}$$

$$1 \cdot f = f \text{ για } f \in \widetilde{S_m(A)}.$$

(11)

Όπως σε ένα διανυσματικό χώρο υπάρχει στοιχείο του γραφεται σαν ένας πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων μιας βάσης του υπό αυτό το συμβαίνει και με το

$\mathbb{Z}$ -πρότυπο $\widetilde{S_m(A)}$. Τα στοιχεία του οποίου εδώ θα παίρνουν το ρόλο των στοιχείων μιας βάσης θα τα λέμε στοιχειώδεις m -ατομίδες στο A .

Τις συνηρημένα έχουμε του εξής ορισμό

Ορισμός 2.2.8

Έστω $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\gamma: [0, 1]^m \rightarrow A$

να είναι ένας ιδιόκλητος m -υπόβος στο A .

Θεωρούμε την συνάρτηση $\tilde{\gamma}: S_m(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ με τρόπο:

$$\tilde{\gamma}(\gamma') = \begin{cases} 1 & \text{αν } \gamma' = \gamma \\ 0 & \text{αν } \gamma' \neq \gamma \end{cases}$$

Προφανώς εξ' ορισμού έχουμε ότι $\tilde{\gamma} \in \widetilde{S_m(A)}$.

Την συνάρτηση $\tilde{\gamma}$ την ονομάζουμε στοιχειώδη m -ατομίδα στο A .

Με βάση τον παραπάνω ορισμό έχουμε τώρα την εξής πρόταση

Πρόταση 2.2.9

Έστω $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Έστω τυχόντως $f \in S_m(A)$. Τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος από γραμμάρια m -αυτίδια $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_v$, όπου $\tilde{\gamma}_i \in S_m(A)$ για $i=1, 2, \dots, v$, και υπάρχουν $v \in \mathbb{N}$ και υπάρχουν αντίστοιχοι αριθμοί

$q_1, q_2, \dots, q_v \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$f = q_1 \tilde{\gamma}_1 + q_2 \tilde{\gamma}_2 + \dots + q_v \tilde{\gamma}_v = \sum_{i=1}^v q_i \tilde{\gamma}_i.$$

Απόδειξη

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) $f=0$, δηλαδή $f(x)=0$ για κάθε $x \in S_m(A)$.

Επιλέγουμε τυχόντως $\tilde{\gamma} \in S_m(A)$ και τότε ισχύει ότι

$$f = 0 \cdot \tilde{\gamma} \text{ και άρα ισχύει το αποτέλεσμα για}$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}, v=1, q_1=0.$$

β) $f \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $x \in S_m(A)$

ώστε να ισχύει $f(x) \neq 0$.

Θέτουμε: $S_f := \{x \in S_m(A) \mid f(x) \neq 0\}$. Από την

υπόθεση ισχύει ότι $S_f \neq \emptyset$ και επειδή $f \in S_m$

(13)

για m -αλυσίδα στο A έπεται ότι το S_f είναι πεπερασμένο σύνολο. Έστω λοιπόν ότι ισχύει:

$$S_f = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ για κάποια } n \in \mathbb{N}, \text{ όπου } x_i \in S_m(A) \text{ για κάθε } i=1, 2, \dots, n.$$

Θέτουμε $a_i := f(x_i)$ για κάθε $i=1, \dots, n$. Προφανώς $a_i \in \mathbb{Z}$ για κάθε $i=1, 2, \dots, n$, αφού η f είναι m -αλυσίδα και $a_i \neq 0$, για κάθε $i=1, \dots, n$, από τον ορισμό των a_i , $i=1, \dots, n$.

Θα δείξουμε τώρα ότι ισχύει:

$$f = a_1 \tilde{x}_1 + a_2 \tilde{x}_2 + \dots + a_n \tilde{x}_n = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}_i.$$

Έστω τυχόν $x \in S_m(A)$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) $x \notin S_f$. Τότε είναι ορισμένο $f(x) = 0$, (η του συνόλου S_f).

Αφού $x \notin S_f$, προφανώς $x \neq x_i$, για κάθε $i=1, \dots, n$ και άρα $\tilde{x}_i(x) = 0$ για κάθε $i=1, \dots, n$ από τον ορισμό των στοχευμένων m -αλυσίδων $\tilde{x}_i$, $i=1, \dots, n$.

Από τον ορισμό των πράξεων η πρόσθεση και αρίθμηση/γινόμενο

(15)

$$= a_1 \tilde{r}_1(x) + a_2 \tilde{r}_2(x) + \dots + a_{i_0} \tilde{r}_{i_0}(x) + \dots + a_n \tilde{r}_n(x)$$

$$= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_{i_0} \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 0 = a_{i_0}(y).$$

Από τις (3) και (4) έπεται ότι: $f(x) = (a_1 \tilde{r}_1 + \dots + a_n \tilde{r}_n)(x)$

Παρόμοια έχουμε ότι: $f(x) = (a_1 \tilde{r}_1 + a_2 \tilde{r}_2 + \dots + a_n \tilde{r}_n)(x)$
 $= a_i$ για κάθε $x \in S_f$ με $x = x_i$ για κάποιο $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Αρα τελικά έχουμε ότι $f(x) = (a_1 \tilde{r}_1 + a_2 \tilde{r}_2 + \dots + a_n \tilde{r}_n)(x)$

για κάθε $x \in S_{\text{int}}(A)$, από τις i) και ii) και άρα

$$f = a_1 \tilde{r}_1 + a_2 \tilde{r}_2 + \dots + a_n \tilde{r}_n \text{ και εδείχθη το ζητούμενο.} \blacksquare$$

Έτσι από την παραπάνω πρόταση 2.2.9 κάθε m -αλυσίδα στο A γράφεται σαν ένας πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός στοιχειωδών m -αλυσίδων στο A .

Για την συνέχεια θα μας χρειαστεί η έννοια του συνόρου μιας m -αλυσίδας.

Για να την ορίσουμε θα πρέπει να ορίσουμε πρώτα κάποιες προπαραρτημένες έννοιες.

Ξεκινάμε με τον παρακάτω ορισμό

Ορίσμος 2.2.10

Έστω $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ με $1 \leq i \leq m$ ορίζουμε δύο

ιδιόμορφους $(m-1)$ -υπόβους τους $I_{(i,0)}^m$ και $I_{(i,1)}^m$,

όπου: $I_{(i,0)}^m: [0,1]^{m-1} \rightarrow [0,1]^m$ και

$I_{(i,1)}^m: [0,1]^{m-1} \rightarrow [0,1]^m$ με τήνους:

$$I_{(i,0)}^m(x) = I^m((x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{m-1})) =$$

$$= (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{m-1}) \text{ και}$$

$$I_{(i,1)}^m(x) = I^m((x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{m-1})) =$$

$$= (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{m-1}) \text{, για κάθε}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \in [0,1]^{m-1}.$$

Αν ληδύ η εικόνα $I_{(i,0)}^m(x)$ για $x = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$

είναι ένα στοιχείο του $[0,1]^m$ που έχει στην

i -θέση το 0 και στην $1^{\text{η}}$, $2^{\text{η}}$, ..., $(i-1)^{\text{η}}$ θέση

έχει αντίστοιχα τους αριθμούς $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ και

στη θέση $i+1, i+2, \dots, m$ έχει αντίστοιχα τους

αριθμούς $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{m-1}$.

Το ίδιο μπορούμε να πράξουμε:

(17)

$$I_{(i,0)}^w(x) = y \quad \text{όπου} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \in [0,1]^{m-1}$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in [0,1]^m, \text{ όπου}$$

$$y_j = x_j, \text{ για } \forall j \in \{1, \dots, l-1\}$$

$$y_l = 0, \text{ και } y_j = x_{j-1} \text{ για } \forall j \in \{l+1, \dots, m\}$$

$$y_j = \begin{cases} x_j & \text{για } j = 1, \dots, l-1 \\ 0 & \text{για } j = l \\ x_{j-1} & \text{για } j = l+1, \dots, m \end{cases}$$

Παρατήρηση η συνάρτηση $I_{(i,1)}^w(x)$ για $(x = x_1, \dots, x_{m-1}) \in [0,1]^{m-1}$ είναι ένα στοιχείο του $[0,1]^m$ που έχει στην l -θέση το 1 και στα $1^{\text{η}}, 2^{\text{η}}, \dots, (l-1)^{\text{η}}$ θέσεις έχει αντίστοιχα τους αριθμούς $x_1, x_2, \dots, x_{l-1}$ και στις θέσεις $l+1, l+2, \dots, m$ έχει αντίστοιχα τους αριθμούς $x_l, x_{l+1}, \dots, x_{m-1}$.

Το ίδιο για $x = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \in [0,1]^{m-1}$ μπορούμε να πούμε ότι: $I_{(i,1)}^w(x) = y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in [0,1]^m$, όπου:

$$y_j = \begin{cases} x_j & \text{για } j = 1, \dots, l-1 \\ 1 & \text{για } j = l \\ x_{j-1} & \text{για } j = l+1, \dots, m \end{cases}$$

(18)

Είναι ενδιαφέρον να συμπεριλάβουμε μαζί τους ορθώντες, οι συναρτήσεις $I_{(i,0)}^w$ και $I_{(i,1)}^w$ για την ανέχηση.

Ας δούμε μερικές τιμές των $I_{(i,0)}^w$ και $I_{(i,1)}^w$ για $i \in \mathbb{N}$.

1) Για $w=1$. Τότε προφανώς το μοναδικό $i \in \mathbb{N}$ με $1 \leq i \leq w$ είναι το $i=1$. Τότε $w-1=0$ και

$[0,1]^0 = \{0\}$. Έτσι για $i=1$ έχουμε τους δύο

ιδιόμορφους 0-υπόβους $I_{(1,0)}^1$ και $I_{(1,1)}^1$,

όπου: $I_{(1,0)}^1: \{0\} \rightarrow [0,1]$ με $I_{(1,0)}^1(0) = 0$ και

$I_{(1,1)}^1: \{0\} \rightarrow [0,1]$ με $I_{(1,1)}^1(0) = 1$.

2) Για $w=2$. Τότε τα $i \in \mathbb{N}$ με $1 \leq i \leq w=2$

είναι 2 τα $i=1$ και $i=2$.

Έτσι λοιπόν: για $i=1$ έχουμε δύο ιδιόμορφους

1-υπόβους τους $I_{(1,0)}^2$ και $I_{(1,1)}^2$, όπου:

$I_{(1,0)}^2: [0,1] \rightarrow [0,1]^2$ με

$I_{(1,0)}^2(x) = (0, x)$ για κάθε $x \in [0,1]$ και

$I_{(1,1)}^2: [0,1] \rightarrow [0,1]^2$ με

$I_{(1,1)}^2(x) = (1, x)$, για κάθε $x \in [0,1]$.

(19)

Για $i=2$ έχουμε δύο ιδιότητες 2-υψους τους

$I_{(2,0)}^2$ και $I_{(2,1)}^2$, όπου:

$I_{(2,0)}^2: [0,1] \rightarrow [0,1]^2$ με τόνο:

$I_{(2,0)}^2(x) = (x, 0)$, για κάθε $x \in [0,1]$ και

$I_{(2,1)}^2: [0,1] \rightarrow [0,1]^2$ με τόνο:

$I_{(2,1)}^2(x) = (x, 1)$, για κάθε $x \in [0,1]$.

3) Για $m=3$. Τότε προφανώς για $i \in \mathbb{N}$ με $1 \leq i \leq m$ είναι για $i=1, 2, 3$. Έτσι διακρίνουμε 3

περιπτώσεις:

i) για $i=1$. Έχουμε δύο ιδιότητες 2-υψους τους

$I_{(1,0)}^3$ και $I_{(1,1)}^3$, όπου:

$I_{(1,0)}^3: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]^3$ με τόνο:

$I_{(1,0)}^3((x_1, x_2)) = (0, x_1, x_2)$ για κάθε

$(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ και

$I_{(1,1)}^3: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]^3$ με τόνο:

$I_{(1,1)}^3((x_1, x_2)) = (1, x_1, x_2)$ για κάθε $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$.

(20)

ii) Για $i=2$ Έχουμε δύο ιδιότητες 2-υβόλου
που $I_{(2,0)}^3$ και $I_{(2,1)}^3$, όπου:

$I_{(2,0)}^3: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]^3$ με νόμο:

$I_{(2,0)}^3((x_1, x_2)) = (x_1, 0, x_2)$ για κάθε
 $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ και

$I_{(2,1)}^3: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]^3$ με νόμο:

$I_{(2,1)}^3((x_1, x_2)) = (x_1, 1, x_2)$ για κάθε $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$

iii) Για $i=3$ Έχουμε δύο ιδιότητες 2-υβόλου που

$I_{(3,0)}^3$ και $I_{(3,1)}^3$, όπου:

$I_{(3,0)}^3: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]^3$ με νόμο:

$I_{(3,0)}^3((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0)$ για κάθε

$(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ και

$I_{(3,1)}^3: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]^3$ με νόμο:

$I_{(3,1)}^3((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 1)$ για κάθε $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$

Εδώ με τα παραπάνω είδαμε αναλυτικά όλες τις
περιπτώσεις για $m=1, 2, 3$.

(21)

As υπάρχουν ένα τελευταίο παράδειγμα για να
// καταλάβουμε // καλύτερα τον ορισμό των ιδιοτήτων
($m-1$)-ύψους $I_{(i,0)}^m$ και $I_{(i,1)}^m$.

Παράδειγμα

Έστω $m = 2018$. Τότε τα $i \in \mathbb{N}$ για τα
οποία ισχύει $1 \leq i \leq m$ είναι οι φυσικοί
αριθμοί $i = 1, 2, \dots, 2018$.

Έτσι : για $i = 1$ έχουμε δύο ιδιότητες

$2018-1 = 2017$ -ύψους τους $I_{(1,0)}^{2018}$ και $I_{(1,1)}^{2018}$,
όπου: $I_{(1,0)}^{2018} : [0, 1]^{2017} \rightarrow [0, 1]^{2018}$ γν

τόπο:

$I_{(1,0)}^{2018}((x_1, x_2, \dots, x_{2017})) = (0, x_1, x_2, \dots, x_{2017})$
για κάθε $(x_1, x_2, \dots, x_{2017}) \in [0, 1]^{2017}$ και

$I_{(1,1)}^{2018} : [0, 1]^{2017} \rightarrow [0, 1]^{2018}$ γν

τόπο: $I_{(1,1)}^{2018}((x_1, x_2, \dots, x_{2017})) = (1, x_1, x_2, \dots, x_{2017})$

για κάθε $(x_1, x_2, \dots, x_{2017}) \in [0, 1]^{2017}$.

(22)

Για $2 \leq i \leq m-1$ έχουμε δυο ιδιότητες 2017-
 νόθους τους $I_{(i,0)}^{2018}$ και $I_{(i,1)}^{2018}$, όπου:

$$I_{(i,0)}^{2018} : [0,1]^{2017} \rightarrow [0,1]^{2018} \text{ με νόθο:}$$

$$I_{(i,0)}^{2018}((x_1, x_2, \dots, x_{2017})) =$$

$$= (x_1, \dots, \underset{\substack{\downarrow \\ i\text{-θέση}}}{0}, x_i, \dots, x_{2017}), \text{ όπου το } 0 \text{ βρίσκεται}$$

στην i -θέση, το x_1 είναι στην πρώτη θέση... και για

το x_{i-1} είναι στην $(i-1)$ -θέση ($i-1 \geq 1$), δηλαδή

το x_j είναι στην j -θέση για κάθε $j \in \mathbb{N}$ με

$1 \leq j \leq i-1$, το x_i είναι στην $(i+1)$ -θέση και

γενικά το x_j είναι στην $(j+1)$ -θέση για κάθε $j \in \mathbb{N}$, $i \leq j \leq m-1$ (που μπορεί να συμβαίνει για τον ίδιο x όταν

για ορισμένους $j \leq m-1$ από την υπόθεση).

$$\text{Αντίφα: } I_{(i,1)}^{2018} : [0,1]^{2017} \rightarrow [0,1]^{2018} \text{ με}$$

νόθο:

$$I_{(i,1)}^{2018}((x_1, x_2, \dots, x_{2017})) =$$

$$= (x_1, \dots, \underset{\substack{\downarrow \\ i\text{-θέση}}}{0}, x_i, \dots, x_{2017}), \text{ όπου το}$$

0 βρίσκεται στην i -θέση, το x_j βρίσκεται

(23)

Εάν j -οέβν ριν $u_j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{F}$ $1 \leq j \leq i-1$

και το x_j είναι είν $(j+1)$ -οέβν ριν $u_j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{F}$

$$1 \leq j \leq m-1.$$

Τέλος ριν $i=m$ έχουμε δύο ιδιότητες 2017-

υόβνς τοϋ $I_{(2018,0)}^{2018}$ και $I_{(2018,1)}^{2018}$, όνν:

$$I_{(2018,0)}^{2018} : [0,1]^{2017} \rightarrow [0,1]^{2018} \text{ με τόνν:}$$

$$I_{(2018,0)}^{2018} ((x_1, x_2, \dots, x_{2017})) =$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_{2017}, 0) \text{ και}$$

$$I_{(2018,1)}^{2018} : [0,1]^{2017} \rightarrow [0,1]^{2018} \text{ με τόνν:}$$

$$I_{(2018,1)}^{2018} ((x_1, x_2, \dots, x_{2017})) = (x_1, x_2, \dots, x_{2017}, 1)$$

$$\text{ριν } u_j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{F} (x_1, x_2, \dots, x_{2017}) \in [0,1]^{2017}.$$

Ανλάν $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ το

$$I_{(i,0)}^m ((x_1, x_2, \dots, x_{m-1})) \text{ έχει είν } i\text{-οέβν}$$

το 0 και είν άλλες βόβνς με τιν βόβν 79

$x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$, είν ανόβνς βόβνς (εάνν όνν

τίν i), βόβνς με τίνν το x_1 μέχρι να

βόβνς $m-1$.

(24)

Παρόμοια το $I_{(i,1)}^w (x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ έχει βύθι i -θέτου το 1 και βύθι υπόλοιπες με των βείρη 74 $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$, βείρη 74 με ηρώτο το x_1 .

Με βάθι τώρα του ορίθου 2.2.10 έχουμε τον ενόμεινο ορίθου:

Ορίθου 2.2.11

Έστου $m, n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Έστου $\gamma: [0,1]^m \rightarrow A$ να είναι ένας ιδίθου

m -υόθου στο A . Για $i \in \mathbb{N}$ με $1 \leq i \leq m$ και $a \in \{0,1\}$ ορίθου με των (i,a) -βύθι του m -υόθου γ να είναι η βωήρη $\gamma(i,a) := \gamma \circ I_{(i,a)}^m$.

Αφού $I_{(i,a)}^m: [0,1]^{m-1} \rightarrow [0,1]^m$ και $\gamma: [0,1]^m \rightarrow A$,

έπειτα ότι $\gamma(i,a): [0,1]^{m-1} \rightarrow A$ και επειδή

η $I_{(i,a)}^m$ είναι ηρώβι βείρη για υόθε $i=1,2,\dots,m$ και $a \in \{0,1\}$

έπειτα ότι η $\gamma(i,a)$ είναι ιδίθου 74 $(m-1)$ -υόθου στο A για υόθε $i=1,\dots,m$ και $a \in \{0,1\}$.

(25)

Έτσι για κάθε ιδιόμορφη $(m-1)$ -κύβος $\gamma(i, a)$ στο A ορίζεται η στοιχειώδης $(m-1)$ -αλυσίδα $\widetilde{\gamma(i, a)}$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$, $a \in \{0, 1\}$, οι οποίες είναι βέβαια 2m στο πλήθος.

Έτσι με βάση τον προηγούμενο ορισμό 2.2.12 έχουμε τώρα φτιάξει στον ορισμό του συνόρου μιας m -αλυσίδας.

Έχουμε λοιπόν τον εξής ορισμό.

Ορισμός 2.2.12

Έστω $m, n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Έστω $\gamma: [0, 1]^m \rightarrow A$ να είναι ένας ιδιόμορφος m -κύβος στο A .

Ορίζουμε τώρα σαν σύνολο των στοιχειωδών m -αλυσίδας $\widetilde{\gamma}$ την $(m-1)$ -αλυσίδα που συμβολίζεται με $\partial \widetilde{\gamma}$ και είναι για συνάρτηση

$\partial \widetilde{\gamma}: S_{m-1}(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\partial \widetilde{\gamma} = \sum_{i=1}^m \sum_{a=0,1} (-1)^{i+a} \widetilde{\gamma(i, a)}$$

Εφαρμογή:

(26)

Από τον ορισμό 2.2.12 για

$\gamma = I^m$, $A = [0, 1]^m$, $n = m$, έχουμε ότι:

$$\partial \widetilde{I^m} = \sum_{i=1}^m \sum_{q=0,1} (-1)^{i+q} \widetilde{I_{(i,q)}^m}$$

Ορισμός 2.2.13

Έστω τώρα $m, n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και

f να είναι ζυγόν m -αλυσίδα στο A , δηλαδή

$$f \in \widetilde{S_m}(A).$$

Έστω $f = \sum_{i=1}^n a_i \widetilde{\gamma}_i$ να είναι η μοναδική

γραφή της f που ορίζεται από την πρόταση 2.2.9
όπου $\widetilde{\gamma}_i$, $i=1,2,\dots,n$, για $v \in \mathbb{N}$ να είναι στοιχειώδεις
 m -αλυσίδες και $a_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i=1,2,\dots,n$.

Τότε ορίζουμε:

$$\partial f = \sum_{i=1}^n a_i \partial \widetilde{\gamma}_i \in S_{m-1}(A) \text{ και το ονομάζουμε}$$

το όριο της f .

Με τον ορίσμο 2.2.13 ολοκληρώσαμε τώρα τον ορίσμο του θεωρήματος για m -αλυσίδες σε ένα σύνολο A . Έχουμε τώρα το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.14

Έστω $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και f να είναι μια m -αλυσίδα στο A . Τότε ισχύει:

$$\partial(\partial f) = 0. \text{ Συνολικώς γράφουμε: } \partial^2 = 0.$$

Για μια διαφορική μορφή ω ορίσαμε προηγουμένως το διαφορικό της ω , το $d\omega$ όπως είδαμε.

Θα λέγαμε πολύ χονδρικά (και βεβαίως όχι με ακρίβεια) ότι το $d\omega$ είναι η "παράγωγος" μιας διαφορικής μορφής.

Παρόμοια θα ορίσουμε ότι έχουμε και το "ολοκληρώμα" μιας διαφορικής μορφής.

Ορίσουμε αρχικά το ολοκληρώμα μιας διαφορικής μορφής πάνω σε ένα βασικό κώβο.

Είδαμε στην βελίδα 1 της εισαγωγής ότι για ένα $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση $I^n: [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με

23
 Έστω $I^u(x) = x$ για κάθε $x \in [0,1]^u$ ονομάζεται
 βασικός υψός. Βασικός υψός θα ονομάζουμε και το
 ορθογώνιο $[0,1]^u$ που είναι ο γνωστός μας υψός
 για $u=3$.

Έστω τώρα $u \in \mathbb{N}$, ($u \geq 1$).

Ορισμός 2.2.15

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^u$, $A \neq \emptyset$, A ανοικτό και $[0,1]^u \subseteq A$

έστω $\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^u(\mathbb{R}_p)$ να είναι μία u -διαφορετική

στο A . Προφανώς $\omega = f \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^u$, όπου

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία σκαρπτική τήκη C^∞ .

Ορίζουμε τώρα τον ολοκληρωμα του ω πάνω
 στον βασικό υψό $[0,1]^u$ και το συμβολίζουμε με

$$\int_{[0,1]^u} \omega \quad \text{το ολοκληρωμα} \quad \int_{[0,1]^u} f \quad \text{το γνωστό}$$

εξέ μας από τον ανειροπτό λογισμό IV ολοκλη-
 ρωμα Riemann.

(29)

Αν λαδύ ορίσουμε:

$$\int_{[0,1]^n} \omega = \int_{[0,1]^n} f \quad (1)$$

Ευφραδίζοντας το τι σημαίνουν τα δύο μέλη της (1), η (1) μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\int_{[0,1]^n} f dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{[0,1]^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx^1 \dots dx^n \quad (2)$$

και η παράσταση στην (2) είναι και ένα από τους

λόγους για τον συμβολισμό των διαφορηικών

dx^i , για $i=1,2,\dots,n$ με τον συνηθισμένο τρόπο.

Θυμίζουμε ότι, δεδομένης από μία διαφορική

συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ για $n, m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

την συνάρτηση

$$f_n^\# : \prod_{q \in \mathbb{R}^m} \Omega^n(\mathbb{R}^n_q) \rightarrow \prod_{p \in \mathbb{R}^m} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p) \quad \text{για}$$

(30)

υάρθε $u \in \mathbb{N}$ ή $u \leq \min \{m, n\}$.

Παράφοια αυτών αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $B \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι
ανοικτά τότε είναι δύο χώροι και

$f: A \rightarrow B$ είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση τότε
ορίζεται όπως

$$f_u^*: \prod_{q \in B} \Omega^u(\mathbb{R}^m_q) \rightarrow \prod_{p \in A} \Omega^u(\mathbb{R}^n_p) \quad \text{με τον}$$

ίδιο τρόπο, για υάρθε $u \in \mathbb{N}$, $u \leq \min \{m, n\}$.

Έστω τώρα $u \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ με $u \leq n$ και

$\gamma: \Gamma \rightarrow A$ να είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση,
όπου $[\sigma, \sigma]^u \subset \Gamma$ και το Γ είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}^u$

και $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, A ανοικτό.

Προφανώς ο περιορισμός $\gamma|_{[\sigma, \sigma]^u}$ είναι ένας
ιδιόμορφος u -υόθος στο A .

Θεωρώντας τώρα την γ στην θέση της f παραπάνω
ορίζεται

$$\gamma_u^*: \prod_{q \in A} \Omega^u(\mathbb{R}^n_q) \rightarrow \prod_{p \in \Gamma} \Omega^u(\mathbb{R}^m_p)$$

Με βάση την παραπάνω ορολογία έχουμε τώρα τον
εξής ορισμό:

Ορισμός 2.2.16

Έστω $n, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n$, $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$,

$[0,1]^n \subseteq \Gamma$, Γ, A ανοικτά στον αντίστοιχο χώρο

$\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^n$ και έστω (ο περιορισμός $\Gamma|_{[0,1]^n}$)

$\gamma: \Gamma \rightarrow A$ είναι ένας διαφορίσιμος ιδιόμορφος κλάδος
θεωρούμε την n -αλυσίδα $\tilde{\gamma}$ που ορίζεται από την
 γ .

Έστω τώρα τυχαία διαφορίσιμη n -μορφή

εάν A , δηλαδή $\omega \in \Pi \Sigma^n(\mathbb{R}^n)$.

$q \in A$

Ορίζουμε τώρα σαν στοιχείωμα της n -μορφής ω

νάινω είναι n -αλυσίδα $\tilde{\gamma}$ του αριθμού

$\int_{[0,1]^n} \gamma_n^*(\omega)$ που ορίζεται στον ορισμό 2.2.15

$[0,1]^n$

και το συμβολίζουμε με $\int_{\tilde{\gamma}} \omega^{(*)}$

(*) (Τιποτά όταν γράφουμε $\tilde{\gamma}$ εννοούμε: $\gamma|_{[0,1]^n}$, $\tilde{\gamma} = \gamma|_{[0,1]^n}$
των περιορισμών της γ στο $[0,1]^n$)

(32)

Διπλάσι έχουμε:

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{[0,1]^n} \gamma_n^*(\omega)$$

Έστω τώρα $n \in \mathbb{N}$, ($n \geq 1$) και $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$,
 A ανοικτό με $[0,1]^n \subseteq A$.

Έστω $I^n: A \rightarrow A$ με $I^n(x) = x$, $\forall x \in A$, διπλάσι
 I^n είναι η επένδυση του βασικού χώρου I^n στο A , ή
 με άλλα λόγια η ταυτοτική συνάρτηση στο A (id_A).

Θα δείξουμε ότι για τυχόν σύνολο X , $X \neq \emptyset$, η ταυτοτική
 συνάρτηση id_X είναι η συνάρτηση $\text{id}_X: X \rightarrow X$ με
 τύπο: $\text{id}_X(y) = y$, $\forall y \in X$.

με βάση των ορισμών που βελίδα 30 ορίζεται τώρα
 η συνάρτηση

$$(I^n)^* : \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n).$$

Θέτουμε για αντίστοιχο συμβολισμό $\beta := \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n)$

(33)

Για την συνέχεια θα μας χρειαστεί το επόμενο
λέμμα 2.2.17.

Λήμμα 2.2.17

Με βάση τους παραπάνω συμβολισμούς ισχύει:

$$(I^u)^*_u = \text{id}_B \quad \text{ή αλλιώς:}$$

$$(I^u)^*_u(\omega) = \omega \quad \text{για κάθε } \omega \in B.$$

Απόδειξη

Ας ελατθροποιήσουμε ένα $p_0 \in A$.

Προφανώς $I^u(p_0) = p_0$. θεωρούμε την συνάρτηση

$$(I^u)^{p_0}_* : \mathcal{O}^u_{p_0} \rightarrow \mathcal{O}^u_{p_0} \quad \text{με τρόπο:}$$

$$\left((I^u)^{p_0}_* \right) (u_{p_0}) = \left((DI^u(p_0))(u) \right)_{I^u(p_0)} = \left((DI^u(p_0))(u) \right)_{p_0}$$

$$\text{για κάθε } u_{p_0} \in \mathcal{O}^u_{p_0}.$$

(34)

Էնդոմորֆիզմ $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in A$. Դժգոյ

$$I^u(u) = u = (u_1, u_2, \dots, u_n) = (x^1(u), x^2(u), \dots, x^n(u))$$

յետպիսին $u \in A$. Անդրձև $(I^u)_i$, $i=1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}_n$
 01 Երեւոյթի ընդհանրացումը I^u ձեւով $(I^u)_i = x^i$
 Բնութեան n է-արժեքի որոշում $i=1, \dots, n$.

Դիմ $p_0 \in A$, 0 ընդհանրացում $J I^u(p_0)$ ընդհ.

0 ընդհանրացում:

$$J I^u(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_1^u}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial I_1^u}{\partial x_2}(p_0) & \dots & \frac{\partial I_1^u}{\partial x_n}(p_0) \\ \frac{\partial I_2^u}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial I_2^u}{\partial x_2}(p_0) & \dots & \frac{\partial I_2^u}{\partial x_n}(p_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial I_n^u}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial I_n^u}{\partial x_2}(p_0) & \dots & \frac{\partial I_n^u}{\partial x_n}(p_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial x^1}{\partial x_2}(p_0) & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial x_n}(p_0) \\ \frac{\partial x^2}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial x^2}{\partial x_2}(p_0) & \dots & \frac{\partial x^2}{\partial x_n}(p_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial x^n}{\partial x_2}(p_0) & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial x_n}(p_0) \end{pmatrix}$$

(35)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

δηλαδή ο $J I''(p_0) = I_n$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας n -τάξης για κάθε $p_0 \in A$ (και προφανώς είναι ανεξάρτητος από το p_0).

Όπως είναι γνωστό από τον απειροστικό λογισμό III έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned} (D I''(p_0))(u) &= (J I''(p_0) \cdot \overset{\text{συνήθετο νόημα}}{u})^t = u \cdot (J I''(p_0))^t = \\ &= u \cdot (I_n)^t = u \cdot I_n = u \quad \text{για κάθε } u \in \mathbb{R}^n / (2) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας από την (2) στην (1) έχουμε:

$$(I'')^{p_0}(u_{p_0}) = u_{p_0} \quad \text{για το } u_{p_0} \text{ οποιονδήποτε}$$

επαθροποιημένο $p_0 \in A. (3)$

(36)

Αρα από την 137 έχουμε:

$$(I^u)_*^p(u_p) = u_p \text{ για κάθε } p \in A \text{ και για κάθε}$$

$$u \in \mathcal{O}_h^u(Y)$$

Για το σταθεροποιημένο $p_0 \in A$, έχουμε ότι αφού

$$(I^u)_{*}^{p_0} : \mathcal{O}_h^{p_0} \rightarrow \mathcal{O}_h^{p_0}, \text{ τότε ε'} \text{ ορισμός}$$

$$\left((I^u)_{*}^{p_0} \right)_u^* : \mathcal{Z}^u(\mathcal{O}_h^{p_0}) \rightarrow \mathcal{Z}^u(\mathcal{O}_h^{p_0})$$

Έστω τώρα τοχόν $T \in \mathcal{Z}^u(\mathcal{O}_h^{p_0})$. Τότε

ε' ορισμός έχουμε ότι:

$$\left(\left((I^u)_{*}^{p_0} \right)_u^* \right) (T) \in \mathcal{Z}^u(\mathcal{O}_h^{p_0}).$$

Έστω τώρα τοχόν $w = ((u_1)_{p_0}, (u_2)_{p_0}, \dots, (u_n)_{p_0})$

$\in (\mathcal{O}_h^{p_0})^u$. Τότε ε' ορισμός για u -ταυτοχόν

$$\left(\left((I^u)_{*}^{p_0} \right)_u^* \right) (T) \text{ έχουμε,}$$

(37)

$$\begin{aligned} & \left(\left(\left(I^u \right)_*^{p_0} \right)^* \right)_u (T) \left((u_1)_{p_0}, (u_2)_{p_0}, \dots, (u_n)_{p_0} \right) = \\ & = T \left(\left(\left(I^u \right)_*^{p_0} \right) (u_1)_{p_0}, \left(\left(I^u \right)_*^{p_0} \right) (u_2)_{p_0}, \dots, \left(\left(I^u \right)_*^{p_0} \right) (u_n)_{p_0} \right) \end{aligned}$$

αno (u)

$$= T \left((u_1)_{p_0}, (u_2)_{p_0}, \dots, (u_n)_{p_0} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\left(I^u \right)_*^{p_0} \right)^* \right)_u (T) (w) = T(w), \forall w \in \left(R^u_{p_0} \right)^u.$$

$$\text{Αρα } \left(\left(I^u \right)_*^{p_0} \right)^* \right)_u (T) = T, \forall T \in \mathcal{L}^u \left(R^u_{p_0} \right) / (S).$$

As πάρουμε τώρα τυχαία $w \in \mathcal{B}$.

Έχουμε τώρα εβ' ορίσμού:

$$\left(\left(I^u \right)_*^* \right)_u (w) / p_0 = \left(\left(I^u \right)_*^{p_0} \right)^* \right)_u \left(w \left(I^u_{p_0} \right) \right) \stackrel{(S)}{=}$$

$$= w \left(I^u(p_0) \right) = w(p_0), \text{ δηλ το τυχαίο } p_0 \in A.$$

Αρα έχουμε:

$$\left(\left(I^u \right)_*^* \right)_u (w) (p) = w(p), \forall p \in A. \text{ Αρα}$$

$$\left((I^n)_n^* \right) (\omega) = \omega \quad (38)$$

Αφού η (6) ισχύει για το $\omega \in \mathcal{B}$ έπεται
 τελικά ότι: $\left((I^n)_n^* \right) (\omega) = \omega, \forall \omega \in \mathcal{B}$ και

εδείχθη το ζητούμενο. ■

Παρατήρηση 2.2.18

Μπορούμε να πάρουμε το αποτέλεσμα ^{από} $\sqrt{70}$ Λήμμα
 2.2.17 χρησιμοποιώντας επίσης τον τύπο της
 πρότασης 2.14 του 2^{ου} μέρους των συγγραμμάτων
 (σελίδες 67), για την περίπτωση όπου:

$$\omega = h \cdot dx' \wedge dx'' \wedge \dots \wedge dx^n, \text{ για } h \in C^\infty(A).$$

Παρατήρηση 2.2.19

Εφαρμόζουμε τον ορισμό 2.2.16 για $\gamma = I^n$ και
 από το Λήμμα 2.2.17 παίρνουμε ότι: για
 κάθε $\omega = f \cdot dx' \wedge \dots \wedge dx^n$, όπου $f \in C^\infty(A)$

ισχύει:

$$\int_{I^n} \omega = \int_{\tilde{I}^n} f \, dx' \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{\tilde{\omega}, D^n} (I^n)_n^* (\omega) =$$

(39)

$$= \int_{[0,1]^n} \omega = \int_{[0,1]^n} f \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad \underline{\text{exercise (2) section 99}}$$

$$= \int_{[0,1]^n} f(x_1, \dots, x_n) \, dx^1 \dots dx^n, \text{ δηλαδή:}$$

$$\int_{\tilde{I}^n} \omega = \int_{[0,1]^n} f(x_1, \dots, x_n) \, dx^1 \dots dx^n \quad \text{, δηλαδή}$$

το γνωστό μας από τον απειροστικό λογισμό IV
 Riemann ολοκλήρωση της f πάνω στον βασικό
 ήθος $[0,1]^n$. (πολλαπλό ολοκλήρωμα).

Μετά από τα παραπάνω είχατε ερωτήσεις τώρα να
 δώσουμε τον γενικό ορισμό του ολοκληρώματος
 μιας διαφορικής μορφής πάνω στο μια αλυσίδα.

Ορισμός 2.2.20

Έστω $u \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1 \leq u \leq n$,
 $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^u$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $[0, 1]^u \subseteq \Gamma$, Γ, A να είναι
 ανοικτά σύνολα στους αντίστοιχους χώρους $\mathbb{R}^u$ και
 $\mathbb{R}^n$ και έστω $\gamma \in S_u(A)$, δηλαδή γ να
 είναι μια u -αλυσίδα στο A με την εξής ιδιότητα:
 $\lambda, v \in \mathbb{N}$ και $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_v$ είναι λ -στοιχειώδεις u -
 αλυσίδες στο A και $a_1, a_2, \dots, a_v \in \mathbb{Z}$ ώστε
 $\gamma = \sum_{i=1}^v a_i \tilde{\gamma}_i$, όπως στην πρόταση 2.2.9 τότε οι

$\gamma_i: \Gamma \rightarrow A$ επηρεάζονται δηλαδή σε διαφοροποιήσεις
 συναρτήσεων στο Γ . (Από εδώ και πέρα θα αναφερόμαστε
 σε τέτοιες u -αλυσίδες ή απλώς στο A).

Έστω τώρα ω να είναι μια λ -χούδα
 διαφορική u -μορφής στο A , δηλαδή $\omega \in \wedge^u \mathcal{L}^u(\mathbb{R}^n)$
 $\text{ρε } A$

Ορίζουμε τώρα το στοιχείωδες της u -μορφής ω
ή απλώς την u -αλυσίδα γ του αριθμού

$$\sum_{i=1}^v a_i \int_{\tilde{\gamma}_i} \omega, \text{ όπου οι αριθμοί } \int_{\tilde{\gamma}_i} \omega \text{ για } i=1, \dots, v$$

(42)

έχουν ορίστει από τον αριθμό 2.2.16.

Αυτών του αριθμού τον συμβολίζουμε με:

$\int_{\gamma} \omega$. Διότι έχουμε,

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^v q_i \int_{\tilde{\gamma}_i} \omega.$$

Για την συνέχεια θα μας χρειαστεί και το επόμενο
λήμμα:

Λήμμα 2.2.21

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$,

$i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, $a \in \{0, 1\}$ και $A \subseteq \mathbb{R}^n$,

A ανοικτό, ώστε $[0, 1]^n \subseteq A$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ να
είναι μια C^∞ συνάρτηση. Τότε ισχύει:

$$\int_{[0, 1]^{n-1}} \left((I_{(0, a)}^n)^* \right)_{n-1} (f \, dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{(*)}{\wedge} dx^i \wedge \dots \wedge dx^n) =$$

$$= \begin{cases} 0 & q \sim i \neq j \\ \int_{\overset{(*)}{\wedge} [0, 1]^n} f(x_1, \dots, a, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n & q \sim i = j \end{cases}$$

(*) το $\wedge dx^i$ σημαίνει ότι ο παράγοντας dx^i λείπει

(42)

όπου ο συμβολισμός $(x_1, \dots, a, \dots, x_n)$ παραμένει σύμφωνος
 ότι το $(x_1, \dots, a, \dots, x_n)$ έχει στην i -θέση το a
 και παντού αλλού τα $x_1, \dots, x_n$ (ευτός από το x_i).

Απόδειξη

Εξ' αφορμής έχουμε ότι:

$$I_{(j,a)}^u : [0,1]^{u-1} \rightarrow [0,1]^u \text{ ή απλώς}$$

επέκτεινουμε την $I_{j,a}^u$ στο A και έστω λοιπόν

$$I_{(j,a)}^u : A \rightarrow B \text{ ή επέκταση της } I_{j,a}^u \text{ στο } A$$

όπου $B \subseteq [0,1]^u$, B αναλυτός ως έχει:

$I_{(j,a)}^u(A) \subseteq B$. Αυτό το υφίσταται για να θεωρη-
 σουμε την $(I_{(j,a)}^u)_{u-1}^*$ αφού η $I_{(j,a)}^u$ πρέπει να
 έχει σαν πεδία ορισμού και τιμών αναλυτός σύνολο,
 από τον ορισμό της $(I_{(j,a)}^u)_{u-1}^*$.

Από την πρόταση 2.10 του 2^{ου} μέρους των συμπεριώσεων
 έχουμε τώρα:

$$((I_{(j,a)}^u)_{u-1}^*) (f \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^i \wedge \dots \wedge \partial x^u) =$$

$$= (f \circ I_{(j,a)}^u) \cdot ((I_{(j,a)}^u)^{\ast}_{k-1}) (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^u) / 1)$$

Όπως έχουμε δείξει στην άσκηση 8 (βελ/δ9 195) του 2ου μέρους των συμπληρωματικών 1 έχουμε:

$$\begin{aligned} & ((I_{(j,a)}^u)^{\ast}_{k-1}) (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^u) = \\ & = ((I_{(j,a)}^u)^{\ast}_1) (dx^1) \wedge \dots \wedge ((I_{(j,a)}^u)^{\ast}_1) (dx^i) \wedge \dots \wedge ((I_{(j,a)}^u)^{\ast}_1) (dx^u) / 1). \end{aligned}$$

Από την πρόταση 2.9, (βελ/δ9 47) των 2^{ων} συμπληρωματικών έχουμε για $l \in \{1, 2, \dots, u\}$

$$((I_{(j,a)}^u)^{\ast}_1) (dx^l) = \sum_{p=1}^{u-1} \frac{\partial (I_{(j,a)}^u)_e}{\partial x_p} dx^p \quad (3).$$

Για $l=1, 2, \dots, u$ έχουμε τώρα ότι: $\left(\text{για την } l\text{-περικύβερση των } (I_{(j,a)}^u)_e \text{ της } I_{(j,a)}^u \right)$

$(I_{(j,a)}^u)_e : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου:

$$(I_{(j,a)}^u)_e (x_1, x_2, \dots, x_{u-1}) = \begin{cases} x_l & \text{για } l=1, \dots, j-1 \\ a & \text{για } l=j \\ x_{l-1} & \text{για } l=j+1, \dots, u \end{cases} \quad (4)$$

Από την (4) παίρνουμε τώρα:

(44)

$$\frac{\partial ((I_{(j,a)}^u)_e)}{\partial x_p} = 0 \quad \text{αν} \quad l < j \quad \text{και} \quad p \neq l \quad (5)$$

$$\frac{\partial ((I_{(j,a)}^u)_e)}{\partial x_p} = 1 \quad \text{αν} \quad l < j \quad \text{και} \quad p = l \quad (6)$$

Αντίστοιχα βγαίνοντας από τις (5) και (6) βγαίνει (3) παίρνουμε:

$$\left((I_{(j,a)}^u)_1^* \right) (\partial x^l) = \partial x^l \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad l \in \{1, 2, \dots, 4\} \quad \text{και}$$

$$l < j \quad (7)$$

Για $l \in \{1, 2, \dots, 4\}$ και $l \geq j+1$ έχουμε τώρα από τις (4)

$$\frac{\partial ((I_{(j,a)}^u)_e)}{\partial x_p} = 0 \quad \text{αν} \quad p \neq l-1 \quad (8)$$

$$\frac{\partial ((I_{(j,a)}^u)_e)}{\partial x_{l-1}} = 1 \quad (9)$$

(45)

Αντικαθιστώντας από τις (8) και (9) στην (3) για $l \in \{1, 2, \dots, 4\}$ με $l \neq j$ παίρνουμε:

$$\left(\left(I_{(j,j)}^4 \right)_1^* \right) (\partial x^l) = \partial x^{l-1} \quad (10).$$

Τότε για $l=j$ έχουμε (από την (4))

$$\frac{\partial \left(\left(I_{(j,j)}^4 \right)_e \right)}{\partial x^p} = 0 \quad \text{για κάθε } p=1, \dots, 4-1 \quad (11).$$

Αντικαθιστώντας από τις (11) στην (3) παίρνουμε:

$$\left(\left(I_{(j,j)}^4 \right)_1^* \right) (\partial x^j) = 0 \quad \text{για κάθε } j=1, \dots, 4. \quad (12).$$

Έστω τώρα τυχαία $i, j \in \mathbb{N}$ με $i, j \in \{1, \dots, 4\}$.

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

α) $i \neq j$. Τότε το γινόμενο $\partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^{i-1} \wedge \dots \wedge \partial x^4$ έχει ε' οριζόντιους παράγοντες όλα τα ∂x^l για $l \in \{1, \dots, 4\} \setminus \{i\}$. Άρα έχει σαν παράγοντες όλα τα ∂x^j . Άρα από την (2) το γινόμενο στο δεύτερο μέλος θα έχει σαν παράγοντα και το

$$\left(\left(I_{(j,j)}^4 \right)_1^* \right) (\partial x^j) \text{ το οποίο ισούται με μηδέν}$$

από την (12).

Άρα όλο το γινόμενο στο δεύτερο μέλος της (2) είναι 0 αφού έχει σαν παράγωγο το 0

Εάνο την πρόταση 2.21, 3) η) (βλ. δα 95) του 2^{ου} μέρους των συζητήσεων).

Άρα και το πρώτο μέλος της (2) ισούται με μηδέν.

Αν λοιπόν ισχύει:

$$\left(\left(I_{(j,a)}^u \right)^*_{u-1} \right) (\partial x^1 \wedge \dots \wedge \hat{\partial x^i} \wedge \dots \wedge \partial x^u) = 0 \text{ για}$$

κάθε $i, j \in \{1, \dots, u\}$ με $i \neq j$ (13)

(16). $i = j$.

Τότε το γινόμενο $\partial x^1 \wedge \dots \wedge \hat{\partial x^i} \wedge \dots \wedge \partial x^u$ έχει
όλους τους παράγοντες ∂x^ℓ για όλα τα $\ell \in \{1, \dots, u\} \setminus \{j\}$

Αν υποθέσουμε τώρα από τη (7) και (10) στην (2) ορίσουμε:

$$\begin{aligned} & \left(\left(I_{(j,a)}^u \right)^*_{u-1} \right) (\partial x^1 \wedge \dots \wedge \hat{\partial x^j} \wedge \dots \wedge \partial x^u) = \\ & = \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^{u-1} \text{ για κάθε } j = 1, \dots, u. \quad (14) \end{aligned}$$

Ετσι μπορούμε να πράξουμε σωστά με τις (13) και (14) ως εξής:

$$\begin{aligned} & \left(\left(I_{(j,a)}^u \right)^*_{u-1} \right) (\partial x^1 \wedge \dots \wedge \hat{\partial x^i} \wedge \dots \wedge \partial x^u) = \\ & = \begin{cases} 0 & \text{αν } i \neq j \\ \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^{u-1} & \text{αν } i=j \text{ και } j \in \{1, \dots, u\} \end{cases} \quad (15) \end{aligned}$$

(47)

Αντικαθιστώντας τώρα στο (15) έχουμε (2) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & \left((I_{(g,a)}^u)^* \right)_{u-1} (f \, dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^u) = \\ & = \begin{cases} 0 & \text{αν } i \neq j \\ (f \circ I_{(g,a)}^u) \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{u-1}) & \text{αν } i=j \\ & \text{για} \end{cases} \end{aligned}$$

υπόθε $i, j \in \{1, \dots, u\}$. (16)

Προφανώς για $\omega = 0$ να είναι η μηδενική $(u-1)$ -μορφή στο $A \subseteq \mathbb{R}^u$, μπορούμε να πάρουμε $\phi = 0 \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{u-1})$, όπου $0: A \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μηδενική συνάρτηση στο A , δηλαδή $0(x) = 0 \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in A$.

Έτσι, από τον ορισμό 2.2.15 για $\omega = 0$ έχουμε από το προηγούμενο

$$\int_{[0,1]^{u-1}} \phi = \int_{[0,1]^{u-1}} 0 = 0 \quad (17)$$

Έτσι από τις (16) και (17) παίρνουμε ότι:

$$\int_{[0,1]^{u-1}} \left((I_{(g,a)}^u)^* \right)_{u-1} (f \, dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^u) = 0 \quad \text{για}$$

(48)

υπόθε $i, j \in \{1, \dots, n\}$ με $i \neq j$ (18).

Ας πάρουμε τώρα $i, j \in \{1, \dots, n\}$ με $i = j$

Από την (16) παίρνουμε τώρα:

$$\int_{[0,1]^{n-1}} ((I_{(g,a)}^u)^*_{i-1}) (f \, dx'_1 \dots \wedge dx'_j \wedge \dots \wedge dx'_n) =$$

$$= \int_{[0,1]^{n-1}} (f \circ I_{(g,a)}^u) (dx'_1 \wedge \dots \wedge dx'_{n-1}) \quad (19)$$

Από τον ορισμό 2.2.15 έχουμε τώρα:

$$\int_{[0,1]^{n-1}} (f \circ I_{(g,a)}^u) (dx'_1 \wedge \dots \wedge dx'_{n-1}) =$$

$$= \int_{[0,1]^{n-1}} f \circ I_{(g,a)}^u \quad (20)$$

Χρησιμοποιώντας όμως την προηγούμενη (2) στην περίπτωση (2) παίρνουμε:

$$\int_{[0,1]^{n-1}} f \circ I_{(g,a)}^u = \int_{[0,1]^{n-1}} f(x_1, \dots, a, \dots, x_{n-1}) \, dx'_1 \wedge \dots \wedge dx'_{n-1} \quad (21)$$

όπου στο $(x_1, \dots, a, \dots, x_{n-1})$ το a είναι στην j -θέση και στις υπολοίπες είναι με την σειρά από τα $x_1, \dots, x_{n-1}$.

(49)

Ξαναγράφονται όλες οι μεταβλητές στην (21) σε
 ενιαία σειρά από την πρώτη μέχρι και την u -μεταβλητή,
 η (21) διαφύεται τώρα:

$$\int_{[0,1]^{u-1}} f(x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_j, \dots, x_{u-1}) \partial x_1' \dots \partial x_{j-1}^{j-1} \partial x_j^j \dots \partial x_{u-1}^{u-1}$$

$$= \int_{[0,1]^{u-1}} f(x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_u) \partial x_1' \dots \partial x_{j-1}^{j-1} \partial x_{j+1}^{j+1} \dots \partial x_u^u \quad (22).$$

$$\text{Θέτουμε } [0,1]^{u-1} = U = \underbrace{([0,1] \times \dots \times [0,1])}_{(j-1)\text{-φορές}} \times \underbrace{([0,1] \times \dots \times [0,1])}_{(u-j)\text{-φορές}}$$

$$\text{και } \Pi = [0,1].$$

$$\text{Θα ταυτίσουμε το } U \times \Pi = [0,1]^u \text{ (ως συνόλους)}$$

Η f είναι C^∞ στο A , όπου $[0,1]^u \subseteq A$ και άρα

f είναι συνεχώς στο $[0,1]^u$ και άρα και Riemann-
 ολοκληρώσιμη στο $[0,1]^u$.

Από την συνέχεια της f στο $[0,1]^n$ έπεται ότι, εφαρμόζεται το θεώρημα του Fubini στα αλγεβρικά ορθογώνια Π και K

θεωρούμε την $g: [0,1]^n \rightarrow [0,1]^n$ με τύπο:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n) \text{ όπου}$$

το $(x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n)$ έχει στην i -θέση το x_i για κάθε $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ ενώ $x_j = a$

Προφανώς η $f \circ g: [0,1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα του Fubini (7.3.1 θεώρημα, σελίδα 499 από το βιβλίο: Απειροστικός λογισμός σε πολλομεταβλητές (Τάκης Χαραλαμπίδης) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^n} f \circ g &= \int_{x \in \Pi} \left(\int_{y \in K} (f \circ g)(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_K f(x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n) \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{j-1} \partial x_{j+1} \dots \partial x_n \right) dx_j = \\ &= \left(\int_{[0,1]^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n) \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{j-1} \partial x_{j+1} \dots \partial x_n \right) \cdot \int_0^1 1 \partial x_j = \end{aligned}$$

(51)

$$= \int_{[0,1]^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n) \partial x_1 \dots \partial x_{j-1} \partial x_{j+1} \dots \partial x_n \quad (23)$$

όπου

$$\int_{[0,1]^n} f \circ g = \int_{[0,1]^n} f(x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n) \partial x_1 \dots \partial x_n \quad (24)$$

Από τις (19), (20), (21), (22), (23) και (24) παίρνουμε τώρα:

$$\int_{[0,1]^{n-1}} ((I_{j,a}^n)^*) (f \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^j \wedge \dots \wedge \partial x^n) =$$

$$= \int_{[0,1]^n} f(x_1, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n) \partial x_1 \dots \partial x_n \quad (25)$$

Από τις (18) και (25) τώρα έπεται το ζητούμενο. ■

Μετά την απόδειξη του προηγούμενου λήμματος
2.2.21 είμαστε πλέον έτοιμοι να διατυπώσουμε
και να αποδείξουμε το γνωστότερο θεώρημα σε
αυτό το κλάδο, δηλαδή το Θεώρημα του Stokes.

Θεώρημα 2.2.22 (Θεώρημα του Stokes)

Έστω $u, n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u < n$ και $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$,
 A ανοικτό. Έστω ω να είναι μια $(u-1)$ -μορφή
 στο A (δηλαδή $\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^{u-1}(\mathbb{R}^n_p)$) και γ (*)

να είναι μια u -αλυσίδα στο A . Τότε ισχύει:

$$\int_{\gamma} d\omega = \int_{\partial\gamma} \omega.$$

Απόδειξη

Θ' αποδείξουμε το Θεώρημα, χωρίζοντας την
 απόδειξη του σε διάφορες περιπτώσεις.

1^η περίπτωση

Υποθέτουμε ότι η γ είναι μια στοιχειώδης u -αλυσίδα
 η $\tilde{\gamma}$ όπου $\gamma = I^u$, δηλαδή ο βασικός u -κύβος που
 ορίζεται σε κάποιο ανοικτό σύνολο Γ , όπου $[0, 1]^u \subseteq \Gamma$.
 Υποθέτουμε ακόμη ότι:
 $\omega = \omega_i = f \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^u$, για κάποιο $i \in \{1, \dots, u\}$.

(*) Υποθέτουμε ότι η γ ορίζεται όπως στην σελίδα 40
 αυτών των σημειώσεων.

όπου το σύμβολο ∂x^i σημαίνει ότι λείπει μόνο ο παράγοντας dx^i από το γινόμενο $dx^1 \dots dx^n$ και

$f \in C^\infty(A)$, δηλαδή $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και η f είναι τάξης C^∞ στο A , δηλαδή η ω_f είναι μία $(n-1)$ διαφορίσιμη μορφή στο A , όπου $\gamma = \mathbb{I}^n$, έχουμε ότι $[0,1]^n \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Από τον ορισμό 2.2.12, βλέπουμε 26 έχουμε: για $\gamma = \mathbb{I}^n$

$$\partial \tilde{\gamma} = \sum_{i=1}^n \sum_{q=0,1} (-1)^{q+i} \widetilde{I_{(\mathbb{I}, q)}^n} = \partial \widetilde{I}^n \quad (1)$$

Από τον ορισμό 2.2.20 έχουμε: (και παρόμοια για γ)

$$\int_{\partial \tilde{\gamma}} \omega_i = \sum_{i=1}^n \sum_{q=0,1} (-1)^{q+i} \int_{\widetilde{I_{(\mathbb{I}, q)}^n}} \omega_i \quad (2)$$

Από τον ορισμό 2.2.16 έχουμε:

$$\int_{\widetilde{I_{(\mathbb{I}, q)}^n}} \omega_i = \int_{[0,1]^{n-1}} (I_{(\mathbb{I}, q)}^n)^*_{i-1} (\omega_i) \quad (3)$$

(54)

Από το διπλάσιο 2.2.22 και την (3) έχουμε για
 $\omega_i = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^4$ ότι:

$$\underbrace{\int_{I_{(j,a)}^4} \omega_i}_{(4)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } i \neq j \\ \int_{[0,1]^4} f(x_1, \dots, x_4) dx_1 \dots dx_4 & \text{αν } i=j \end{cases} \quad (4)$$

όπου το a στο $f(x_1, \dots, a, \dots, x_4)$ είναι στην i -οστή θέση.

Αντικαθιστώντας από τις (4) στην (2) παίρνουμε ότι:

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega_i = (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^4} f(x_1, \dots, 1, \dots, x_4) dx_1 \dots dx_4 +$$

$$+ (-1)^i \int_{[0,1]^4} f(x_1, \dots, 0, \dots, x_4) dx_1 \dots dx_4 \quad (5) \text{ όπου } \gamma$$

και 1 στο $f(x_1, \dots, 1, \dots, x_4)$ και $f(x_1, \dots, 0, \dots, x_4)$

αντικαθιστώντας είναι στην i -οστή θέση.

Αφού η f είναι C^∞ στο $A \subseteq \mathbb{R}^4$ έχουμε από

την πρόταση 2.3, (βελίδα 27) του δεύτερου μέρους των

συμπεράσματα ότι: $df = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial f}{\partial x_j} dx^j$ (6).

(55)

Από την (6) και την επιμεριστική ιδιότητα του εξωτερικού
 γινώμενου διαφορικών μορφών ως προς την πρόθεση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} df \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^u &= \\ &= \left(\sum_{j=1}^u \frac{\partial f}{\partial x_j} dx^j \right) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^u = \\ &= \sum_{j=1}^u \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} (dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^u) \right) \quad (7) \end{aligned}$$

Αφού $u \geq 2$ (ε' όριζόν) και το $j \in \{1, \dots, u\}$, τότε
 εάν $i \neq j$ τότε $j \in \{1, \dots, u\} \setminus \{i\} \neq \emptyset$ (αφού $u \geq 2$)

και άρα το εξωτερικό γινώμενο

$dx^j \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^u$ έχει σαν παράγοντα και
 το dx^j (αφού έχει όλους τους παράγοντες εκτός
 από τον dx^i). Άρα το γινώμενο

$dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^u$ περιέχει δύο
 παράγοντες ίσους με dx^j και άρα από την
 πρόταση 2.21, 3, δ) (σελίδα 94) του δεύτερου μέρους
 των συλλογισμών έπεται ότι: $dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^u = 0$
 (η μηδενική u -μορφή) για κάθε $j \in \{1, \dots, u\} \setminus \{i\}$.

(56)

Άρα από τους παραπάνω είναι (7) ο $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ μπορεί να είναι μηδέν είναι ο

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} (\partial x^1 \wedge \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^i \wedge \dots \wedge \partial x^n) \quad (8).$$

Επαγωγικά έλκεται εύκολα ότι:

$$\begin{aligned} \partial x^i \wedge \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^i \wedge \dots \wedge \partial x^n &= \quad (9) \\ &= (-1)^{i-1} \partial x^1 \wedge \partial x^2 \wedge \dots \wedge \partial x^n \quad (\text{αφού μετά φέρω} \end{aligned}$$

που θα αλλάζουμε το ∂x^i με κάποιο από τους παραπάνω ∂x^j , για $j \in \{1, \dots, i\}$ παίρνουμε ∂x^j με (-1) και πρέπει να αλλάξουμε $i-1$ τέτοιες αλλαγές

Έτσι από τις (7), (8) και (9) παίρνουμε ότι:

$$\partial f \wedge \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^i \wedge \dots \wedge \partial x^n = (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} (\partial x^1 \wedge \partial x^2 \wedge \dots \wedge \partial x^n) \quad (9).$$

Εξ' ορισμού του διαφορίσιμου διαφορίσιμων μορφών έχουμε:

$$\partial (f (\partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^i \wedge \dots \wedge \partial x^n)) =$$

$$\partial f \wedge \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^i \wedge \dots \wedge \partial x^n \quad (10).$$

Έτσι από τις (9), (10) και το lemma 2.2.17 έχουμε:

(57)

$$\begin{aligned}
 & \int_{\tilde{I}^u} d(f dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^u) \quad \underline{\text{op 16/05 2.2.16}} \\
 &= \int_{[0,1]^u} (I^u)_*^* (d(f dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^u)) \quad \underline{\text{op 16/05 2.2.17}} \\
 &= \int_{[0,1]^u} d(f dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^u) \quad \underline{\text{(20) 4/04/19}} \\
 &= \int_{[0,1]^u} (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x_i} (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^u) = \\
 &= \int_{[0,1]^u} (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^u) \quad \underline{\text{op 16/05 2.2.15}} \\
 &= \int_{[0,1]^u} (-1)^{i-2} \frac{\partial f}{\partial x_i} = (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^u} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (11)
 \end{aligned}$$

(58)

Για την συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Fubini. Θα μας χρειαστεί μια συγκεκριμένη μορφή του. Αν αφέσουμε αυτή τη μορφή εδώ μαζί με τον αντίστοιχο συμβολισμό για να γίνει κατανοητό το πως εφαρμόσουμε αυτή τη συγκεκριμένη μορφή.

Πρόκειται για το θεώρημα 7.3.2, σελίδα 499 από το βιβλίο του Τυλέμαχου Χατζηαφράτη

(Απειροστικός λογισμός σε πολλές μεταβλητές).

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, και $h: [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ να

είναι μια συνεχής συνάρτηση.

Ας σταθεροποιήσουμε μια $(n-1)$ -άδα $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$

$\in [0, 1]^{n-1}$ για κάποιον $i \in \{1, \dots, n\}$. (Αν βέβαια $i=1$ τότε

δεν υπάρχουν τα $x_1, \dots, x_{i-1}$, ενώ εάν $i=n$, δεν υπάρχουν οι

όροι $x_{i+1}, \dots, x_n$. Θέτουμε για απλότητα

$x_0 = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Με βάση το κο ορίζεται

τώρα η συνάρτηση $g_{x_0}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^n$ με πηλο:

$g_{x_0}(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$, για κάθε

$x \in [0, 1]$, όπου το x είναι στην i -θέση στο

διάνυσμα $(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$.

(59)

Ορίζεται τώρα η συνάρτηση $F_{x_0} \equiv \int_0^1 g_{x_0}$, όπου:

$F_{x_0}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και είναι συνεχής ως σύνθεση
συνεχών και άρα Riemann-ολοκληρώσιμη.

Έτσι ορίζεται κατ'οίκον ο αριθμός $\int_0^1 F_{x_0} = \int_0^1 F_{x_0}(x) dx$.

Έτσι για καθε $x_0 = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in [0, 1]^{n-1}$,

ορίζεται ο αριθμός $\int_0^1 F_{x_0}(x) dx$.

Ορίζεται έτσι η συνάρτηση $\phi: [0, 1]^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ με
τύπο: $\phi(x_0) = \int_0^1 F_{x_0}(x) dx$, για καθε $x_0 \in [0, 1]^{n-1}$.

Η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής και άρα Riemann-ολοκληρώσιμη.

Το Θεώρημα του Fubini μας λέει τώρα ότι

ισχύει:
$$\int_{[0, 1]^n} h = \int_{[0, 1]^{n-1}} \phi \quad (12)$$

Θα εφαρμόσουμε τώρα το παραπάνω Θεώρημα του

Fubini για $h = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

(60)

Ας έστω δεδομένη έχουμε μια $(n-1)$ -άδα

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in [0, 1]^{n-1} \text{ για το } i.$$

Θέτουμε για απλότητα $x_0 = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Με βάση το x_0 ορίζεται η συνάρτηση

$$g_{x_0}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^n \text{ με τύπο:}$$

$$g_{x_0}(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \text{ για κάθε}$$

$$x \in [0, 1]. \text{ Θέτουμε } F_{x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ g_{x_0}, \text{ όπου}$$

$$F_{x_0}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\text{Θέτουμε ακόμα } G_{x_0} = f \circ g_{x_0}, \text{ όπου}$$

$$G_{x_0}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}. \text{ Η } F_{x_0} \text{ είναι συνεχής και}$$

$$\text{άρα ορίζεται το } \int_0^1 F_{x_0} = \int_0^1 F_{x_0}(x) dx.$$

Από τον ορισμό της μεριμής παραγωγής έχουμε ότι:

$$G'_{x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ g_{x_0} = F_{x_0}.$$

Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού
λογισμού (θεώρημα 20.1, σελίδα 66, τόμος II, από
το βιβλίο Απειροστικής Νοχισμός των Μετρεσώντων-
Πωτόπουλου - Γιαννακούλια) έχουμε τώρα:

(61)

$$\int_0^1 F_{x_0}(x) dx = \int_0^1 G'_{x_0}(x) dx = G_{x_0}(1) - G_{x_0}(0) =$$

$$= (f \circ g_{x_0})(1) - (f \circ g_{x_0})(0) \quad (13).$$

Θα μπορούμε τώρα να βωοήρουμε $\phi: [0,1]^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$
 με τύπο: $\phi(x_0) = \int_0^1 F_{x_0}(x) dx$, για κάθε $x_0 \in [0,1]^{n-1}$.

Τότε όπως πριν έχουμε ότι (όπως στην (12))

$$\int_{[0,1]^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \int_{[0,1]^{n-1}} \phi \quad (14).$$

Θα μπορούμε τώρα να βωοήρουμε $\phi_1, \phi_0: [0,1]^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$
 με τύπους: $\phi_1(x_0) = (f \circ g_{x_0})(1)$, $\forall x_0 \in [0,1]^{n-1}$ και
 $\phi_0(x_0) = (f \circ g_{x_0})(0)$, $\forall x_0 \in [0,1]^{n-1}$. Από 79
 παρατηρούμε έχουμε ότι (τους ορίσμούς των ϕ, ϕ_0, ϕ_1)
 $\phi = \phi_1 - \phi_0 \quad (15).$

Αντικαθιστώντας στο (14) στην (14) παίρνουμε:

$$\int_{[0,1]^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \int_{[0,1]^{n-1}} (\phi_1 - \phi_0) = \int_{[0,1]^{n-1}} \phi_1 - \int_{[0,1]^{n-1}} \phi_0 \quad (16).$$

πράγματι, το 0 είναι το 0.

(62)

Για την συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε για μία αυθαίρετη φορά το Θεώρημα του Fubini για τις συναρτήσεις f_0 και f_1 .

Πιο συγκεκριμένα:

Θεωρούμε την συνάρτηση $g_0: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ με

πάλι: $g_0((x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ για

κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ και την $g_1: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ με

πάλι: $g_1((x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$

για κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$. Ορίζουμε τώρα την

συναρτήσεις $f_0, f_1: [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ με πάλι:

$f_0 = f \circ g_0$ και $f_1 = f \circ g_1$. Θα εφαρμόσουμε το

Θεώρημα του Fubini στην μορφή που το έχουμε δει παραπάνω για τις συναρτήσεις f_0 και f_1 .

Ας σταθεροποιήσουμε μία $(n-1)$ -άδα

$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in [0, 1]^{n-1}$ για το δεδομένο

i που έχουμε βρει. Θέτουμε για αντίστοιχα

$x_0 = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Με βάση το x_0

ορίζεται τώρα η συνάρτηση $g_{x_0}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^n$ με

πάλι: $g_{x_0}(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$ για κάθε

$x \in [0, 1]$, όπου το x είναι στην θέση $-i$ στο

(63)

διάνυσμα $(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$.

Ορίζεται τώρα η συνάρτηση

$F_{x_0}^0 = f_0 \circ g_{x_0}$, όπου $F_{x_0}^0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και είναι
συνεχής ως σύνθεση συνεχών και άρα Riemann-
ολοκληρώσιμη.

Έτσι ορίζεται μελὴ ο αριθμός $\int_0^1 F_{x_0}^0 = \int_0^1 F_{x_0}^0(x) dx$.

Έτσι για κάθε $x_0 = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in [0, 1]^{n-1}$,
ορίζεται ο αριθμός $\int_0^1 F_{x_0}^0(x) dx$.

Ορίζεται έτσι η συνάρτηση $\phi_0: [0, 1]^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ με

τότε $\phi_0(x_0) = \int_0^1 F_{x_0}^0(x) dx$, για κάθε $x_0 \in [0, 1]^{n-1}$.

Η συνάρτηση ϕ_0 είναι συνεχής και άρα Riemann-

ολοκληρώσιμη.

Το θεώρημα του Fubini μας λέει ότι ισχύει:

$$\int_{[0, 1]^n} f_0 = \int_{[0, 1]^{n-1}} \phi_0 \quad (17)$$

(64)

Από τον ορισμό της $F_{x_0}^0$ έχουμε:

Έστω $x \in [0, 1]$. Τότε:

$$\begin{aligned} F_{x_0}^0(x) &= (f_0 \circ g_{x_0})(x) = f_0(g_{x_0}(x)) = \\ &= f_0((x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)) \quad \underline{\text{ορισμός της } f_0} \\ &= (f \circ g_0)((x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)) = \\ &= f(g_0((x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n))) = \\ &= f((x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)) \quad (18). \end{aligned}$$

Η (18) μας λέει ότι η $F_{x_0}^0$ είναι σταθερά συνάρτηση με τιμή $f((x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n))$ ανεξάρτητα της μεταβλητής x της συνάρτησης $F_{x_0}^0$. Άρα έχουμε:

$$\int_0^1 F_{x_0}^0(x) dx = \int_0^1 f((x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)) dx =$$

$$= f((x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)) \cdot \int_0^1 1 dx =$$

$$= f((x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)) = \phi_0(x_0) \quad (19)$$

Έτσι από την (19) για τον ορισμό της ϕ_0 παίρνουμε ότι:

$$\phi_0 = \phi_0(x_0).$$

(65)

Από τις (17) και (20) παίρνουμε ότι:

$$\int_{[0,1]^n} f_0 = \int_{[0,1]^{n-1}} \phi_0 \quad (21)$$

Δουλεύοντας αμοιβαία παρόμοια για την f_1 και
θέτοντας f_0 παίρνουμε ότι:

$$\int_{[0,1]^n} f_1 = \int_{[0,1]^{n-1}} \phi_1 \quad (22)$$

Αντικαθιστούμε τώρα από τις (21) και (22) στην (16)
και παίρνουμε:

$$\int_{[0,1]^n} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_{[0,1]^n} f_1 - \int_{[0,1]^n} f_0 \quad (23)$$

Από την (23) έχουμε τώρα:

$$(-1)^{i-1} \int_{[0,1]^n} \frac{\partial F}{\partial x_i} = (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^n} f_1 + (-1)^i \int_{[0,1]^n} f_0 =$$

(66)

$$= (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^n} f_1 + (-1)^i \int_{[0,1]^n} f_0 \quad (24).$$

Από τους ορισμούς των f_0, f_1 , έχουμε για
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n$

$$\begin{aligned} f_0((x_1, x_2, \dots, x_n)) &= (f \circ g_0)((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \\ &= f(g_0((x_1, x_2, \dots, x_n))) = \\ &= f((x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)) \quad (25). \end{aligned}$$

έχουμε:

$$f_1((x_1, x_2, \dots, x_n)) = f((x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)) \quad (26).$$

Αντικαθιστώντας τώρα στο πλ (25) και (26) στην (24),
 η (24) μπορεί να γραφεί και ως εξής (με τον ίδιο τρόπο
 συλλογιστικό).

$$(-1)^{i-1} \int_{[0,1]^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} = (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^n} f((x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)) \partial x_1 \dots \partial x_n$$

$$+ (-1)^i \int_{[0,1]^n} f((x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)) \partial x_1 \dots \partial x_n \quad (27).$$

(67)

Από τις (21) και (27) έχουμε τώρα ότι:

$$\int_{\tilde{I}^u} d(f \, dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^u) =$$

$$= (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^u} f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_u) \, dx_1 \dots dx_u +$$

$$+ (-1)^i \int_{[0,1]^u} f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_u) \, dx_1 \dots dx_u \quad (28)$$

Από τις (5) και (28) έχουμε τώρα ότι:

$$\int_{\partial \tilde{\gamma}} \omega_i = \int_{\tilde{\gamma}} d\omega_i, \text{ δηλαδή το φητούμενο για}$$

την περίπτωση όπου $\gamma = I^u$ και

$$\omega = \omega_i = f \, dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^u \quad \text{για}$$

το $x_i \in \{1, \dots, u\}$

(68)

Για την σχέση θα μας χρειαστούν κάποιες παρατηρήσεις

Παρατήρηση 2.2.23

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, A ανοικτός, $[0,1]^n \subseteq A$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $S_1: \prod_{p \in A} \mathcal{D}^4(\mathbb{R}^n_p) \rightarrow \mathbb{R}$

με τύπο: $S_1(\omega) = \int_{[0,1]^n} \omega$ για κάθε $\omega \in \prod_{p \in A} \mathcal{D}^4(\mathbb{R}^n_p)$.

Τότε η S_1 είναι γραμμική.

Απόδειξη της παρατήρησης 2.2.23

Έστω $\omega_1, \omega_2 \in \prod_{p \in A} \mathcal{D}^4(\mathbb{R}^n_p)$. Τότε υπάρχουν

C^∞ συναρτήσεις $f_1, f_2: A \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\omega_1 = f_1 dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \text{ και } \omega_2 = f_2 dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Αρα $\omega_1 + \omega_2 = (f_1 + f_2) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ από την

παρατήρηση 2.27, 2) βλέπουμε ότι του δεύτερου μέρους των συμπεριβάσεων.

Έτσι ε'σ' ορισμό έχουμε

(69)

$$\int_{[0,1]^n} \omega_1 + \omega_2 \stackrel{\text{οριζήσ.}}{=} \int_{[0,1]^n} f_1 + f_2 \quad \underline{\underline{\text{εφαρμογή του Θεωρήματος 9.2α}}}$$

$$= \int_{[0,1]^n} f_1 + \int_{[0,1]^n} f_2 \stackrel{\text{οριζήσ.}}{=} \int_{[0,1]^n} \omega_1 + \int_{[0,1]^n} \omega_2 \stackrel{\text{οριζήσ.}}{=}$$

$$= S_1(\omega) + S_2(\omega) \stackrel{(2)}{=} \lambda \lambda g'$$

$$S_1(\omega_1 + \omega_2) \stackrel{\text{οριζήσ.}}{=} \int_{[0,1]^n} \omega_1 + \omega_2 \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) έπεται ότι:

$$S_1(\omega_1 + \omega_2) = S_1(\omega_1) + S_1(\omega_2).$$

Έστω $\omega \in \bigcap_{p \in A} \mathcal{S}_E^u(\mathbb{R}^n_p)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Υπάρχει $f \in C^\infty(A)$ ώστε $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι:

$$\lambda \omega = (\lambda f) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (\text{όπου προκύπτει εύκολα}$$

από τους ορισμούς).

(70)

Έχουμε τώρα:

$$S_1(\lambda\omega) = \int_{[0,1]^n} \lambda\omega = \int_{[0,1]^n} \lambda f = \lambda \cdot \int_{[0,1]^n} f = \lambda \cdot \int_{[0,1]^n} \omega =$$

$= \lambda \cdot S_1(\omega)$. Εφόσον τα πεδία ορισμού και τιμών της S_1 είναι διανυσματικοί χώροι, έπεται αμέσως ότι η συνάρτηση S_1 είναι γραμμική στο τα πεδία ορισμού.

Παρατήρηση 2.2.24

Έστω $n, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq n$, $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $[0,1]^n \subseteq \Gamma$, Γ, A είναι ανοικτά σύνολα στο $\mathbb{R}^n$ και έστω n -διάστατους χώρους $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^n$ και έστω

$\gamma: \Gamma \rightarrow A$ να είναι μία C^∞ συνάρτηση (προφανώς $\gamma|_{[0,1]^n}$ είναι ένα ιδιόμορφο n -υπόσύνολο).

Θεωρούμε την n -διάστατη εμβαδόν $\gamma|_{[0,1]^n}$ και την συμβολίζουμε για συντόμηση με $\tilde{\gamma}$. Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση

$$S_2: \prod_{q \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \text{ που ορίζεται ως εξής:}$$

(71)

$$S_2(\omega) = \int_{\tilde{\gamma}} \omega \quad \text{Τότε η } S_2 \text{ είναι γραμμική.}$$

Εξάγε: Έστω $\omega_1, \omega_2 \in \prod_{p \in A} \Omega^u(\mathbb{R}^p)$. Τότε:

$$S_2(\omega_1 + \omega_2) \stackrel{\text{op}}{=} \int_{\tilde{\gamma}} \omega_1 + \omega_2 \stackrel{\text{op}}{=} \int_{[0,1]^u} \gamma_u^*(\omega_1 + \omega_2) \stackrel{\text{γραμμική}}{=}$$

$$= \int_{[0,1]^u} \gamma_u^*(\omega_1) + \gamma_u^*(\omega_2) \quad \underline{\underline{\text{παράθεμα 2.2.23}}}$$

$$= \int_{[0,1]^u} \gamma_u^*(\omega_1) + \int_{[0,1]^u} \gamma_u^*(\omega_2) \stackrel{\text{op}}{=} \int_{\tilde{\gamma}} \omega_1 + \int_{\tilde{\gamma}} \omega_2 \stackrel{\text{op}}{=}$$

$$= S_2(\omega_1) + S_2(\omega_2) \quad \text{Εξάγε:}$$

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^u(\mathbb{R}^p)$ $\hookrightarrow$ γραμμική

$$S_2(\lambda\omega) \stackrel{\text{op}}{=} \int_{\tilde{\gamma}} \lambda\omega = \int_{[0,1]^u} \gamma_u^*(\lambda\omega) \stackrel{\text{γραμμική}}{=} \int_{[0,1]^u} \lambda \cdot \gamma_u^*(\omega) \stackrel{\text{παράθεμα 2.2.23}}{=}$$

(72)

$$= \lambda \cdot \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{D}^n} \chi_{\mathcal{U}}^+(\omega) \stackrel{\text{op}}{=} \lambda \cdot \int_{\tilde{\gamma}} \omega = \lambda \cdot S_2(\omega).$$

Αρα από την παραπάνω η S_2 είναι γραμμική.

Παρατήρηση 2.2.25

Έδω $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ ώστε $1 \leq n \leq m$,
 $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathbb{C} \times \mathbb{D}^n \subseteq \Gamma$, Γ, A να είναι
 ανοικτά σύνολα στον αντίστοιχο χώρο $\mathbb{R}^n$ και
 $\mathbb{R}^m$ και έδω $\gamma \in S_n(A)$ ώστε η γ να έχει τις
 ιδιότητες που περιγράφονται στον ορισμό 2.2.20.

Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση
 $S_3: \prod_{p \in A} \Omega^q(\mathbb{R}^n_p) \rightarrow \mathbb{R}$ με τρόπο:

$$S_3(\omega) = \int_{\gamma} \omega, \text{ για κάθε } \omega \in \prod_{p \in A} \Omega^q(\mathbb{R}^n_p).$$

Τότε η S_3 είναι γραμμική.

Απόδειξη της παρατήρησης 2.2.25

(73)

Έστω $\tilde{\gamma}_i, i=1, \dots, v$ να είναι οι στοιχειώδεις κατευθύνσεις
στο A και $a_i \in \mathbb{Z}$, για $i=1, \dots, v$ (για κάποιο $v \in \mathbb{N}$) ώστε:

$$\gamma = \sum_{i=1}^v a_i \tilde{\gamma}_i.$$

Έστω $\omega_1, \omega_2 \in \prod_{p \in A} \Omega^4(\mathbb{P}_p^v)$. Έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned} S_3(\omega_1 + \omega_2) &\stackrel{op}{=} \int_{\gamma} \omega_1 + \omega_2 \stackrel{op}{=} \\ &= \sum_{i=1}^v a_i \int_{\tilde{\gamma}_i} \omega_1 + \omega_2 \stackrel{2.2.24}{=} \sum_{i=1}^v a_i \left(\int_{\tilde{\gamma}_i} \omega_1 + \int_{\tilde{\gamma}_i} \omega_2 \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^v a_i \int_{\tilde{\gamma}_i} \omega_1 + \sum_{i=1}^v a_i \int_{\tilde{\gamma}_i} \omega_2 \stackrel{op}{=} \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2 \stackrel{op}{=} S_3(\omega_1) + S_3(\omega_2).$$

Έστω $\lambda \in \mathbb{P}_n$ και $\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^4(\mathbb{P}_p^v)$.

(74)

Τότε έχουμε:

$$S_3(\lambda\omega) \stackrel{\circ p}{=} \int_{\gamma} \lambda\omega \stackrel{\circ p}{=} \sum_{i=1}^v q_i \int_{\tilde{\gamma}_i} \lambda\omega \quad \underline{\underline{\text{ε.ε.2α}}}$$

$$= \sum_{i=1}^v (q_i \lambda) \int_{\tilde{\gamma}_i} \omega = \lambda \cdot \sum_{i=1}^v q_i \int_{\tilde{\gamma}_i} \omega \stackrel{\circ p}{=}$$

$$= \lambda \cdot \int_{\gamma} \omega = \lambda \cdot S_3(\omega)$$

Από τη παραπάνω έπεται ότι η S_3 είναι γραμμική. ■

Ας βω εχίσαμε τώρα την απόδειξη του θεωρήματος του Stokes.

2^η περίπτωση

Έστω πάλι ότι $\gamma = I^n$, δηλαδή ο βασικός n -κύβος που ορίζεται σε κάποιο αντιστοιχισμένο σύνολο Γ όποιου

το $\mathbb{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Έστω τώρα ω να είναι μία

οποιαδήποτε $(n-1)$ -μορφή στο Γ . Τότε υπάρχει

n -μορφή ω στο $\mathbb{D}^n$ (ή n -μορφή στο Γ) οι

ω_i , για $i=1, \dots, n$ ώστε $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i$ και

$\omega_i = f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$ για κάθε $i=1, \dots, n$, όπου $f_i \in C^\infty(\Gamma)$ για κάθε $i=1, \dots, n$.

Από την περίπτωση 2 ισχύει το θεώρημα του Stokes για κάθε μία από τις $\omega_i, i=1, \dots, n$.

Έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} d\omega &\stackrel{\text{op}}{=} \int_{\tilde{\gamma}} d\left(\sum_{i=1}^n \omega_i\right) \stackrel{\text{α-αριθμητική}}{=} \int_{\tilde{\gamma}} \sum_{i=1}^n d(\omega_i) \stackrel{2.2.24}{=} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\tilde{\gamma}} d(\omega_i) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{περίπτωση 1}}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\partial \tilde{\gamma}} \omega_i \stackrel{\text{παράγωγος 2.2.25}}{=} \\ &\stackrel{=}{=} \int_{\partial \tilde{\gamma}} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i\right) \stackrel{\text{op}}{=} \int_{\partial \tilde{\gamma}} \omega \quad \text{και έτσι} \end{aligned}$$

ισχύει το θεώρημα του Stokes για την τομή ω που είναι $(n-1)$ μορφή στο Γ , όπου μας χρειάζονται οι παραπάνω 3 παρατηρήσεις: 2.2.23, 2.2.24 και 2.2.25.

Τρίτη περίπτωση

Έστω $\Gamma \subseteq [0, 1]^k$, Γ ανοικτό, $k, n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$,
 $1 \leq k \leq n$, A ανοικτό, $\gamma: \Gamma \rightarrow A$ διαφορίσιμη C^∞
 βωδρση

Από τον ορισμό του βωδρου γιας ιδιόμορφου n -
 αλυσίδας έχουμε:

$$\partial \tilde{\gamma} = \sum_{i=1}^k \sum_{a=0,1} (-1)^{i+a} \widetilde{\gamma_{(i,a)}} \quad (1)$$

Από τον ορισμό του στοιχειώδους διαφορίσιμου μορφής
 πάνω σε τοχούδα αλυσίδα παίρνουμε (από την (1))

$$\int_{\partial \tilde{\gamma}} \omega = \sum_{i=1}^k \sum_{a=0,1} (-1)^{i+a} \int_{\widetilde{\gamma_{(i,a)}}} \omega \quad (2)$$

(ω είναι $(n-1)$ -μορφή πάνω στην $(n-1)$ αλυσίδα $\partial \tilde{\gamma}$)

Επίσης ε' ορισμός έχουμε:

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^k \sum_{a=0,1} (-1)^{i+a} \widetilde{I_{(i,a)}^n} \quad (3)$$

(77)

Από την (3) και τον ορισμό του ολοκληρώματος πάνω σε αλυσίδα παίρνουμε:

$$\int_{\partial \tilde{I}^u} \gamma_{u-1}^*(\omega) = \sum_{i=1}^u \sum_{a=0,1} (-1)^{i+a} \int_{\tilde{I}(i,a)} \gamma_{u-1}^*(\omega) \quad (4)$$

Από τον ορισμό του ολοκληρώματος διαφορικής μορφής πάνω σε μια στοιχειώδη αλυσίδα έχουμε:

$$\int_{\gamma(i,a)} \omega = \int_{[0,1]^{u-1}} \left(\gamma(i,a) \right)_{u-1}^* (\omega) \quad (5)$$

Εξ' ορισμού έχουμε:

$$\gamma(i,a) = \gamma \circ \tilde{I}_{(i,a)}^u, \text{ για κάθε } i=1, \dots, u, \quad a=0,1. \quad (6)$$

Από την πρόταση 2.33, β), βελίδια 160 του 2^{ου} μέρους των συλλεώσεων έχουμε (χρησιμοποιώντας την (6))

$$\left(\gamma(i,a) \right)_{u-1}^* = \left(\gamma \circ \tilde{I}_{(i,a)}^u \right)_{u-1}^* = \left(\tilde{I}_{(i,a)}^u \right)_{u-1}^* \circ \gamma_{u-1}^* \quad (7)$$

(78)

Αν για $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ και $\forall q \in \{0, 1\}$ έχουμε:

$$\int_{[0,1]^{n-1}} \left(\chi_{(i,q)} \right)_{n-1}^* (\omega) = \int_{[0,1]^{n-1}} \left(I_{(i,q)}^n \right)_{n-1}^* \circ \chi_{n-1}^* (\omega) =$$

$$= \int_{[0,1]^{n-1}} \left(I_{(i,q)}^n \right)_{n-1}^* \left(\chi_{n-1}^* (\omega) \right) (8)$$

Από τον ορισμό του στοιχειώμενου διαφορίσιμου μορφισμού χ_{n-1}^* σε $n-1$ χωρικά αλγεβρα παίρνουμε:

$$\underbrace{\int_{I_{(i,q)}^n} \chi_{n-1}^* (\omega)} = \int_{[0,1]^{n-1}} \left(I_{(i,q)}^n \right)_{n-1}^* \left(\chi_{n-1}^* (\omega) \right) (9)$$

$$\underbrace{\int_{\chi_{(i,q)}} \omega} = \int_{I_{(i,q)}^n} \chi_{n-1}^* (\omega) (10) \text{ για } n \geq 2 \text{ και } i=1, \dots, n \text{ και } q=0,1.$$

(79)

Από τις (2), (4) και (10) παίρνουμε ότι:

$$\int_{\partial \tilde{\gamma}} \omega = \int_{\partial \tilde{I}^n} \gamma_{n-1}^*(\omega) \quad (11)$$

Από την πρόταση 2.31, βελίδα 148 του 2^{ου} μέρους του συγγραφέα έχουμε:

$$\gamma_n^*(\partial \omega) = \partial (\gamma_{n-1}^*(\omega)) \quad (12)$$

Από την (12) παίρνουμε:

$$\int_{\tilde{I}^n} \gamma_n^*(\partial \omega) = \int_{\tilde{I}^n} \partial (\gamma_{n-1}^*(\omega)) \quad (13)$$

Από τους ορισμούς τώρα η $\gamma_{n-1}^*(\omega)$ είναι μία $(n-1)$ -μορφή στο $\Gamma \geq [0,1]^n$.

Εφαρμόζουμε τώρα την ολοκλήρωση 2 που δείξαμε προηγούμενα στο την $(n-1)$ -μορφή $\gamma_{n-1}^*(\omega)$ (στην θέση του ω) και παίρνουμε:

$$\int_{\tilde{I}^n} \partial (\gamma_{n-1}^*(\omega)) = \int_{\partial \tilde{I}^n} \gamma_{n-1}^*(\omega) \quad (14)$$

(80)

Από τις (11), (13) και (14) παίρνουμε:

$$\int_{\widetilde{I}^n} \gamma_n^*(\partial\omega) = \int_{\partial\widetilde{\gamma}} \omega \quad (15)$$

Από τον ορισμό του ολοκληρώματος διαφορικής μορφής πάνω σε στοιχειώδη αλυσίδα παίρνουμε:

$$\int_{\widetilde{\gamma}} \partial\omega = \int_{[0,1]^n} \gamma_n^*(\partial\omega) \quad (16)$$

Έχουμε $\in \mathcal{E}^*$ ορισμού του ολοκληρώματος διαφορικής μορφής πάνω σε στοιχειώδη αλυσίδα:

$$\int_{\widetilde{I}^n} \gamma_n^*(\partial\omega) = \int_{[0,1]^n} (I^n)^* (\gamma_n^*(\partial\omega)) \quad \underline{\underline{\text{Πήληξη 2.2.17}}}$$

$$= \int_{[0,1]^n} \gamma_n^*(\partial\omega) \quad (17)$$

(81)

Από τις (15), (16) και (17) παίρνουμε:

$$\int_{\tilde{\gamma}} d\omega = \int_{\partial \tilde{\gamma}} \omega, \text{ δηλαδή το θεωρήμα του}$$

Stokes για τοχώντα στοιχειώδη n -αλυσίδα γ στο

$$A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Τέταρτη (γενική) περίπτωση

Έστω γ να είναι μια n -αλυσίδα με τις υποθέσεις του θεωρήματος και ω να είναι μια $(n+1)$ -μορφή πάλι, με τις υποθέσεις του θεωρήματος.

Έστω $\tilde{\gamma}_i$, $i=1,2,\dots,v$ τις αλυσίδες $v \in \mathbb{N}$ να είναι στοιχειώδεις n -αλυσίδες στο A και $a_i \in \mathbb{Z}$ για $i=1,\dots,v$ ώστε $\gamma = \sum_{i=1}^v a_i \tilde{\gamma}_i$ από την πρόταση 2.2.9. Τότε από τον ορισμό 2.2.20 έχουμε:

$$\int_{\gamma} d\omega = \sum_{i=1}^v a_i \int_{\tilde{\gamma}_i} d\omega \quad (1)$$

(82)

Από την περίπτωση (3) έχουμε τώρα:

$$\int_{\tilde{\gamma}_i} d\omega = \int_{\partial \tilde{\gamma}_i} \omega \quad \text{για κάθε } i=1, \dots, n \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\int_{\gamma} d\omega = \sum_{i=1}^n q_i \int_{\partial \tilde{\gamma}_i} \omega \quad (3).$$

Από τον ορισμό 2.2.13 για $f=\gamma$ παίρνουμε ότι:

$$\partial \gamma = \sum_{i=1}^n q_i \tilde{\gamma}_i \quad (4).$$

Από τον ορισμό του ολοκληρώματος διαφορώντας μορφής πάνω σε αλυσίδα και την (4) παίρνουμε:

$$\int_{\partial \gamma} d\omega = \sum_{i=1}^n q_i \int_{\partial \tilde{\gamma}_i} d\omega \quad (5). \quad \text{Από τις (3) και (5) τώρα}$$

παίρνουμε:

$$\boxed{\int_{\gamma} d\omega = \int_{\partial \gamma} \omega}$$

και το θεώρημα του Stokes έχει πλέον αποδειχθεί!

Παρατήρηση 2.2.26

Στην απόδειξη του θεωρήματος του Στόιες έχει
 γίνει μόνο ενδεικτικό βήμα το οποίο το περνούμε
 χωρίς να του δώσουμε βεβαιότητα, γιατί τελικά δεν
 έχει καί βεβαιότητα.

Πιο συγκεκριμένα:

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό

και έστω $\gamma \in \widetilde{S}_n(A)$, δηλαδή γ να είναι μια

η-αλυσίδα στο A . Είδαμε ότι υπάρχουν στοιχειώδεις

η-αλυσίδες στο A ~~από~~ $\tilde{\gamma}_i$, για $i = 1, \dots, n$, για

κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και αμέτρητοι αριθμοί (διαφορές του μ με γ
 αν $\gamma \neq 0$) ώστε να ισχύει:

$$\gamma = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{\gamma}_i, \text{ όπου } \tilde{\gamma}_i : [0, 1] \rightarrow A \text{ είναι οι}$$

απλ/στοιχειώδεις ιδιόμορφες η-αλυσίδες στο A και $\tilde{\gamma}_i \neq \tilde{\gamma}_j$ για
 $i \neq j$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η γραφή στο (1) δεν ισχύει
 είναι μεταδοί.

(84)

Έστω συνιστάει ότι υπάρχει μελλ

στοιχειώδεις η-αλυσίδες $\tilde{\delta}_i, i=1, \dots, m$ όπου

$\delta_i: [0,1]^n \rightarrow A$ είναι οι αντίστοιχοι ιδιόμορφες η-αλβες στο A και αμέσως αριθμοί $b_j, j=1, \dots, m$ διαφορετικοί του 0 ώστε να ισχύει:

$$\gamma = \sum_{j=1}^m b_j \tilde{\delta}_j \quad (8) \text{ και } \delta_i \neq \delta_j \text{ για } i \neq j, i, j \in \{1, \dots, m\}.$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $i \in \{1, \dots, v\}$ ώστε

$\gamma_i \notin \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Τότε ε' αλβες έχουμε ότι

$\delta_j(\gamma_i) = 0, \forall j=1, \dots, m$ και άρα από την (2)

έχουμε: $\gamma(\gamma_i) = \left(\sum_{j=1}^m b_j \tilde{\delta}_j \right)(\gamma_i) = \sum_{j=1}^m b_j \tilde{\delta}_j(\gamma_i) = 0$

άρα, αφού $\gamma(\gamma_i) = \left(\sum_{j=1}^v a_j \tilde{\gamma}_j \right)(\gamma_i) = a_i \cdot \tilde{\gamma}_i(\gamma_i) = a_i \cdot 1 =$

$= a_i \neq 0$, από την (1). Άρα

$\gamma_i \in \{\delta_j, j=1, \dots, m\}$ ή αλλιώς $i=1, \dots, v$ και

όψοι και συμμετρικά έπεται ότι $\delta_j \in \{\gamma_i, i=1, \dots, v\}$ για α' $j=1, \dots, m$.

(85)

Αυτό δίνει ότι:

$\{x_i, i=1, \dots, v\} = \{\delta_j, j=1, \dots, w\}$ για προφανώς $v=w$,
(αφού $x_i \neq x_j$, για $i \neq j$ και $\delta_i \neq \delta_j$ για $i \neq j$).

Για κάθε $i=1, \dots, v$ έχουμε

$$a_i = \chi(x_i) = \left(\sum_{j=1}^v \theta_j \tilde{x}_j \right)(x_i) = b_i, \quad \forall i=1, \dots, v$$

πρόταση που ολοκληρώνει την απόδειξη ότι η

πράξη $\chi = \sum_{i=1}^v a_i \tilde{x}_i$ όπου $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$ ή $i, j \in \{1, \dots, v\}$ και $a_i \neq 0, \forall i=1, \dots, v$ είναι μοναδική.

Μετά το θεμελιώδες θεώρημα αυτού του μαθήματος που είναι το θεώρημα του Stokes είμαστε έτοιμοι τώρα ν' αποδείξουμε το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα αυτού του μαθήματος που είναι το Πήγμα του Poincaré.

Πριν διατυπώσουμε και αποδείξουμε αυτό το θεμελιώδες αποτέλεσμα αναφέρουμε εδώ τους σχετικούς ορισμούς.

Ορισμός 2.2.27

Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $0 \leq k < n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$,

$A \neq \emptyset$, A ανοικτό.

Έστω ω να είναι μια k -διαφορική μορφή

στο A , δηλαδή $\omega \in \bigcap_{r \in \mathbb{N}} \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ αν $k \geq 1$

ή $\omega \in C^\infty(A)$, δηλαδή η $\omega: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια σάρτησα τάξης C^∞ , αν $k=0$.

Η ω ονομάζεται κλειστή εάν ισχύει

$d\omega = 0$ (όπου $\mu \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε την μηδενική ($k+1$) διαφορική μορφή στο A).

Αν $n \geq 1$ σε αυτόν τον ορισμό και υπάρχει μια $(n-1)$ διαφορική μορφή ω στο A (δηλαδή $\omega \in \bigcup_{r \in A} \Sigma^{n-1}(P_r^n)$ αν $n \geq 2$ και $\omega \in C^\infty(A)$ αν $n=1$) ώστε να ισχύει: $\omega = d\eta$ τότε η ω αναφέρεται αριθμός.

Θα μελετήσουμε παρακάτω την σχέση μεταξύ αυτών των δύο εννοιών. Δηλαδή τις έννοιες της αριθμής και της υπερβολής διαφορικής μορφής.

Έχουμε με βάση τους ορισμούς αμέσως παρακάτω το εξής θεώρημα

Πρόταση 2.2.28

Έστω ω να είναι μια αριθμής n -διαφορική μορφή στο A . Τότε η ω είναι υπερβολή.

Απόδειξη

(88)

Αφού u ω είναι συμβίσι υπάρχει για
(u), διαφορική μορφή u στο A ώστε να ισχύει:
 $\omega = du$. Άρα έχουμε:

$$d\omega = d(du) = 0 \text{ από γνωστή πρόταση.}$$

Άρα u ω είναι κλειστή. ■

Το λήμμα του Ροιντάρτ μας λέει τότε
ωμβαίνει το αντίστροφο του παραπάνω
λήμματος. Θα μας χρειαστούν πρώτα κάποιες
ορισμοί.

Ορισμός 2.2.29

Έστω $u \in \mathbb{N}$ και $a, b \in \mathbb{R}^n$. Ονομάζουμε
ευθύγραμμο γύψο από το a στο b και το
συμβολίζουμε $\gamma \in [a, b]$, το ελλυ υποδύνατο του
 $\mathbb{R}^n$.

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda \in [0, 1]: x = \lambda a + (1-\lambda)b\}$$

Είναι προφανές από αυτόν τον ορισμό ότι:
 $[a, b] = [b, a]$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}^n$ και εάν

$a=b$, τότε: $[a,b] = \{a\}$.

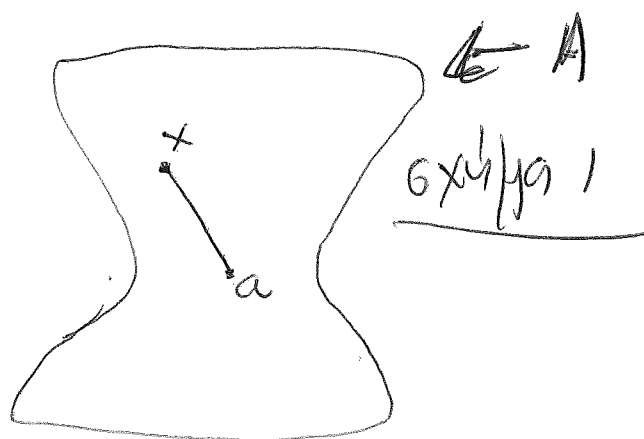
Ορισμός 2.2.30

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, και έστω

$a \in A$. Το A ονομάζεται αστρομόρφο

(ή αστρομόρφο ή αστροδόχημο) ως προς το a

εάν ισχύει ότι $[a,x] \subseteq A$ για κάθε $x \in A$.



Για παράδειγμα το παραπάνω υποσύνολο A του

$\mathbb{R}^2$ είναι αστρομόρφο ως προς το a , αφού

για κάθε $x \in A$ το ευθύγραμμο τμήμα $[a,x] = [x,a]$

περιέχεται στο A .

Παράδειγμα αστρομόρφων σωμάτων είναι τα

κύρια σώματα.

Ορισμός 2.2.31

Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ δια λέγεται να είναι
 κυρτό εάν ισχύει ότι $[x, y] \subseteq A$ για κάθε
 $x, y \in A$.

Είναι προφανές τώρα από τους ορισμούς του
 κυρτού και του αστερόμορφου συνόλου ότι κάθε
 κυρτό σύνολο είναι αστερόμορφο ως προς κάθε
 σημείο του.

Θεώρημα (Λήμμα του Poincaré) 2.2.32

Αν το $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό, αστερόμορφο
 σύνολο ως προς 0, τότε κάθε ιερίστη μορφή
 στο A είναι ακριβής.

Πριν αποδείξουμε το Λήμμα του Poincaré
 θα μας χρειαστεί ένα αποτέλεσμα.

Για να το διατυπώσουμε θα μας χρειαστεί
 κάποια ορολογία.

(91)

Όπως βλέπουμε, το σύνολο A στο θεώρημα του Poincaré αρκεί να είναι ανοικτό και αστερόμορφο. Εφείν εδώ για αυτότητα θα σνοθεύουμε επίσης ότι το A είναι και βολυμμετρικό ως προς το 0, δηλαδή αν $x \in A$ τότε και $-x \in A$.

Θα μας χρειστεί για την βω έχεια το παρακάτω αποτέλεσμα: Αποτέλεσμα 2.2.33

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ ώστε:

$\delta_1 < a < b < \delta_2$. θέτουμε: $\Delta = (\delta_1, \delta_2)$.

Έστω $f: \Delta \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μία βωεχής συνάρτηση για την οποία υπάρχουν οι μερίες

παράγωγοι $\frac{\partial^{|\mu|} f}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_n^{\mu_n}}: \Delta \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ και

είναι βωεχής για κάθε $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$, όπου

$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = |\mu|$, $\mu \in \mathbb{Z}$, $\mu \neq 0$.

Τότε ορίζεται η συνάρτηση

$F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$.

για κάθε $x \in \Omega$.

Τότε η F είναι γνήσια C^∞ και ισχύει:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x) dt, \text{ για κάθε } x \in \Omega,$$

για κάθε $j=1, \dots, n$.

(Είναι το παράδειγμα 2 και παράδειγμα 3 από τις σελίδες 168 και 169 του βιβλίου: Απειροστικός λογισμός σε πολλές μεταβλητές, Τηλεφώνου Χατζηαφράτη).

Έστω τώρα $A \subseteq \mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, ώστε το A να είναι ανοικτό, αστερόμορφο ως προς το 0 και συμπαγές ως προς το 0. Έστω $\ell \in \mathbb{N}$, $1 \leq \ell \leq n$.

Θα ορίσουμε μια συνάρτηση I από τις ℓ -μορφές στις $(\ell-1)$ -μορφές.

Έστω λοιπόν $\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^l(\mathbb{R}^n_p)$ να είναι, για

l -μορφή στο A . Τότε όπως έχουμε δείξει η ω θα έχει την ελάχιστη μοναδική τυπική κανονική μορφή

$$\omega = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_l) \in (T_n^l)^*} \omega_{i_1, \dots, i_l}^{\omega} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}, \text{ όπου}$$

(γράφουμε $\omega_{i_1, \dots, i_l}^{\omega}$ θέλοντας να δείξουμε την άμεση εξάρτηση από την διαφορετική μορφή ω).

$\omega_{i_1, i_2, \dots, i_l}^{\omega}: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ συνάρτηση στο A

για κάθε $(i_1, \dots, i_l) \in (T_n^l)^*$ (από δείχνεται ότι μπορούμε να επιλέξουμε κάποιο B)

Επιλέχουμε τώρα ένα $B \subseteq A$ και ένα $\Delta = (\delta_1, \delta_2)$ με

$\delta_1 < 0 < 1 < \delta_2$, όπου B είναι ανοικτό και

απρόσφορο ως προς το 0 ώστε να ισχύει:

$t \cdot x \in A$ για κάθε $t \in \Delta$ και για κάθε $x \in B$.

Για κάθε $(i_1, \dots, i_l) \in (T_n^l)^*$ ορίζουμε τώρα

την συνάρτηση $f_{i_1, \dots, i_l}^{\omega}: \Delta \times B \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f_{i_1, \dots, i_l}^{\omega}(t, x_1, \dots, x_n) = t^{l-1} \omega_{i_1, \dots, i_l}^{\omega}(t(x_1, \dots, x_n)) =$$

$$= t^{l-1} \omega_{i_1, \dots, i_l}^{\omega}(tx), \text{ για κάθε } t \in \Delta \text{ και για}$$

κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in B$. (γράφουμε $f_{i_1, \dots, i_l}^{\omega}$ θέλοντας να δείξουμε την άμεση εξάρτηση από ω και $i_1, \dots, i_l$)

Εφ'όσον οι $\omega_{i_1, \dots, i_l}$ είναι C^∞ συναρτήσεις στο A είναι άμεσο ότι οι συναρτήσεις $f_{i_1, \dots, i_l}^\omega$ είναι επίσης C^∞ στο $\Delta \times B$ για κάθε $(i_1, \dots, i_l) \in (T_n^l)^*$.
 Έτσι για κάθε $(i_1, \dots, i_l) \in (T_n^l)^*$ ορίζεται η
 συναρτημένη $F_{i_1, \dots, i_l}^\omega : B \rightarrow \mathbb{R}$ με τονο:

$$F_{i_1, \dots, i_l}^\omega(x) = \int_0^1 f_{i_1, \dots, i_l}^\omega(t, x_1, \dots, x_n) dt$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B$. (*)
(2.2.33)

Από το παραπάνω αποτέλεσμα $\sqrt{n}$ του διατυνώσαμε
 στις σελίδες 91 και 92 παραπάνω έπεται ότι
 οι συναρτήσεις $F_{i_1, \dots, i_l}^\omega$ είναι τάξης C^∞ στο B
 για κάθε $(i_1, \dots, i_l) \in (T_n^l)^*$.

Σε συνέχεια θα συμβολίζουμε με $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 την i -προβολή, δηλαδή:

$x^i((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_i$ για κάθε $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
 και για κάθε $i = 1, \dots, n$.

(*) Γράφουμε $F_{i_1, \dots, i_l}^\omega$ θέλοντας να δείξουμε την
 άμεση εξάρτηση από ω και $i_1, \dots, i_l$

(95)

Με βάση τους παραπάνω συμβολισμούς ορίζουμε
 τώρα την $(l-1)$ διαφορική μορφή:

$$I(\omega) = \sum_{(i_1, \dots, i_{l-1}) \in (T_n^l)^*} \sum_{q=1}^{l-1} (-1)^{q-1} F_{i_1, \dots, i_{l-1}}^{\omega} \cdot x^{i_1} dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_{l-1}} dx^{i_q} \quad (*)$$

όπου το σύμβολο $\wedge dx^{i_a}$ παραπάνω δηλώνει
 ότι λείπει μόνο ο παράγοντας x^{i_a} από το
 γινόμενο $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{l-1}}$, για το συγκεκριμένο
 $a \in \{1, \dots, l\}$.

Είναι προφανώς από το παραπάνω αποτέλεσμα

$$\text{οτι } I(\omega) \in \prod_{\varphi \in B} \Omega^{l-1}(\mathbb{P}_\varphi^n).$$

Έτσι, από τα παραπάνω ορίζεται η ακόλουθη

συνάρτηση

$$I: \prod_{\varphi \in B} \Omega^l(\mathbb{P}_\varphi^n) \rightarrow \prod_{\varphi \in B} \Omega^{l-1}(\mathbb{P}_\varphi^n), \omega$$

οποια σε κάθε διαφορική l -μορφή $\omega \in \Omega^l B$

αντιπροσώπευσε την $(l-1)$ διαφορική μορφή $I(\omega)$

στο B όπως την ορίσαμε παραπάνω (4).

Έχουμε τώρα το εξής πρόβλημα:

Πρόβλημα 2.2.34

Η συνάρτηση I που ορίστηκε παραπάνω είναι γραμμική.

Απόδειξη

Έστω τώρα $\omega_1, \omega_2 \in \prod_{\beta \in B} \mathcal{Z}^l(\mathbb{R}^n_\beta)$.

Τότε έχουμε:

$$\omega_1 = \sum_{(i_1, \dots, i_l) \in (T_n^l)^*} \omega_{i_1, \dots, i_l}^{\omega_1} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} / (1) \text{ και}$$

$$\omega_2 = \sum_{(i_1, \dots, i_l) \in (T_n^l)^*} \omega_{i_1, \dots, i_l}^{\omega_2} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} / (2), \text{ όπου}$$

οι συναρτήσεις $\omega_{i_1, \dots, i_l}^{\omega_1}, \omega_{i_1, \dots, i_l}^{\omega_2} : B \rightarrow \mathbb{R}$

(19)

(97)

Είναι C^∞ συναρτήσεις στο B για κάθε $(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^\ell)^*$.

Από τις (1) και (2) προφανώς έχουμε:

$$\omega_1 + \omega_2 = \sum_{(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^\ell)^*} (\omega_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_1} + \omega_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_2}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\ell} \quad (3)$$

Αφού $\omega_1, \omega_2 \in \prod_{p \in B} \Omega^\ell(\mathcal{P}_{n,p}^\eta)$ και το σύνολο

$\prod_{p \in B} \Omega^\ell(\mathcal{P}_{n,p}^\eta)$ είναι διανυσματικός χώρος, προφανώς

έχουμε ότι:

$$\omega_1 + \omega_2 = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_\ell) \in (T_n^\ell)^*} \omega_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_1 + \omega_2} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\ell} \quad (4)$$

τυπικής ικανονικής μορφής και από την μοναδικότητα

της τυπικής ικανονικής μορφής, από τις (3) και (4)

έπεται ότι:

$$\omega_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_1 + \omega_2} = \omega_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_1} + \omega_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_2} \quad \text{για κάθε} \\ (i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^\ell)^* \quad (5).$$

Από τους σχετικούς ορίσμούς έχουμε πάλι:

$$\int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_1 + \omega_2} ((t, x_1, \dots, x_n)) =$$

$$= t^{\ell-1} \int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_1 + \omega_2} (t(x_1, \dots, x_n)) \stackrel{(5)}{=}$$

$$= t^{\ell-1} (\int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_1} + \int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_2}) (t(x_1, \dots, x_n)) =$$

$$= t^{\ell-1} (\int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_1} (t(x_1, \dots, x_n)) + \int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_2} (t(x_1, \dots, x_n)))$$

$$= t^{\ell-1} \int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_1} (t(x_1, \dots, x_n)) + t^{\ell-1} \int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_2} (t(x_1, \dots, x_n))$$

$$= \int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_1} ((t, x_1, \dots, x_n)) + \int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_2} ((t, x_1, \dots, x_n))$$

$$= (\int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_1} + \int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_2}) ((t, x_1, \dots, x_n)), \text{ για }$$

$u_0 \in (t, x_1, \dots, x_n) \in \Delta \times B$. Από έχουμε ότι:

$$\int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_1 + \omega_2} = \int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_1} + \int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega_2} \quad \text{για } u_0 \in$$

$$(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^\ell)^* \quad (6).$$

(24)

(99)

Εξ' ορισμού έχουμε τώρα: Έστω $x = (x_1, \dots, x_n) \in B$.
 Τότε: για κάθε $(i_1, \dots, i_n) \in (T_n^l)^*$ έχουμε:

$$F_{i_1, \dots, i_n}^{\omega_1 + \omega_2}(x) = \int_0^1 f_{i_1, \dots, i_n}^{\omega_1 + \omega_2}(t, x_1, \dots, x_n) dt \quad (6)$$

$$= \int_0^1 (f_{i_1, \dots, i_n}^{\omega_1} + f_{i_1, \dots, i_n}^{\omega_2})(t, x_1, \dots, x_n) dt =$$

$$= \int_0^1 ((f_{i_1, \dots, i_n}^{\omega_1})(t, x_1, \dots, x_n) + f_{i_1, \dots, i_n}^{\omega_2}(t, x_1, \dots, x_n)) dt$$

απαιτούμενος του αλγεβρικού Riemann

$$= \int_0^1 f_{i_1, \dots, i_n}^{\omega_1}(t, x_1, \dots, x_n) dt + \int_0^1 f_{i_1, \dots, i_n}^{\omega_2}(t, x_1, \dots, x_n) dt$$

$$= F_{i_1, \dots, i_n}^{\omega_1}(x) + F_{i_1, \dots, i_n}^{\omega_2}(x) = (F_{i_1, \dots, i_n}^{\omega_1} + F_{i_1, \dots, i_n}^{\omega_2})(x)$$

για κάθε $x \in B$ και άρα έχουμε:

$$F_{i_1, \dots, i_n}^{\omega_1 + \omega_2} = F_{i_1, \dots, i_n}^{\omega_1} + F_{i_1, \dots, i_n}^{\omega_2} \quad \text{για κάθε}$$

$$(i_1, \dots, i_n) \in (T_n^l)^* \quad (7).$$

Από την (7) έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned}
 & F_{i_1, \dots, i_l}^{\omega_1 + \omega_2} \cdot x^{i_1} \cdot \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_l} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_l} = \\
 & = (F_{i_1, \dots, i_l}^{\omega_1} + F_{i_1, \dots, i_l}^{\omega_2}) \cdot x^{i_1} \cdot \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_l} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_l} \\
 & = F_{i_1, \dots, i_l}^{\omega_1} \cdot x^{i_1} \cdot \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_l} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_l} + \\
 & + F_{i_1, \dots, i_l}^{\omega_2} \cdot x^{i_1} \cdot \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_l} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_l}
 \end{aligned}$$

για κάθε $(i_1, \dots, i_l) \in (T_n^l)^*$ και για κάθε $a \in \{1, \dots, l\}$ (8).

Από τις (8) παίρνουμε τώρα:

$$I(\omega_1 + \omega_2) =$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{(i_1, \dots, i_l) \in (T_n^l)^*} \sum_{q=1}^l (-1)^{q-1} F_{i_1, \dots, i_l}^{\omega_1 + \omega_2} x^{i_1} \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_q} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_l} \\
 & = \sum_{(i_1, \dots, i_l) \in (T_n^l)^*} \sum_{q=1}^l (-1)^{q-1} F_{i_1, \dots, i_l}^{\omega_1} x^{i_1} \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_q} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_l} + \\
 & + \sum_{(i_1, \dots, i_l) \in (T_n^l)^*} \sum_{q=1}^l (-1)^{q-1} F_{i_1, \dots, i_l}^{\omega_2} x^{i_1} \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_q} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_l} =
 \end{aligned}$$

(100)

(101)

$$= I(\omega_1) + I(\omega_2) \quad (9)$$

Έστω τώρα $\omega \in \prod_{p \in B} \mathcal{Z}^l(\mathbb{R}_p^n)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι :

$$\omega = \sum_{(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_\ell)^*} \omega_{i_1, \dots, i_\ell}^\omega \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_\ell}, \text{ όπου}$$

$\omega_{i_1, \dots, i_\ell}^\omega : B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ συναρτήσεις, δηλαδή ω

ω είναι σε τυπική κανονική μορφή. Από τον ορισμό της ω και τις στοιχειώδεις πράξεις των διαφορηικών μορφών παίρνουμε ότι:

$$\lambda \omega = \sum_{(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_\ell)^*} (\lambda \cdot \omega_{i_1, \dots, i_\ell}^\omega) \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_\ell} \quad (10)$$

Αφού $\lambda \in \mathbb{R}$, $\omega \in \prod_{p \in B} \mathcal{Z}^l(\mathbb{R}_p^n)$ και το σύνολο

$\prod_{p \in B} \mathcal{Z}^l(\mathbb{R}_p^n)$ είναι διανυσματικός χώρος,

έχουμε και ότι $\lambda \omega \in \bigcap_{r \in \mathbb{B}} \Sigma^l(\mathbb{R}^n_r)$. Έστω ότι

$$\lambda \omega = \sum_{(i_1, \dots, i_\ell) \in (\mathbb{T}_n^l)^*} \omega_{i_1, \dots, i_\ell}^{\lambda \omega} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\ell} \quad \text{η γραφή της}$$

$\lambda \omega$ σε τυπική ικανονική μορφή. Επειδή η

τυπική ικανονική μορφή είναι μοναδική και η (10) και

(11) επιφράζω και 2 την ω σε τυπική ικανονική μορφή έπεται ότι

$$\omega_{i_1, \dots, i_\ell}^{\lambda \omega} = \lambda \cdot \omega_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega} \quad \text{για κάθε } (i_1, \dots, i_\ell) \in (\mathbb{T}_n^l)^* \quad (12)$$

Από την (12) τώρα για $(i_1, \dots, i_\ell) \in (\mathbb{T}_n^l)^*$ και

για τυχόν $(t, x_1, \dots, x_n) \in \Delta \times \mathbb{B}$ έχουμε

από τους ορισμούς: (για $x = (x_1, \dots, x_n)$)

$$\begin{aligned} \int_{i_1, \dots, i_\ell}^{\lambda \omega} ((t, x_1, \dots, x_n)) &= t^{\ell-1} \omega_{i_1, \dots, i_\ell}^{\lambda \omega}(t, x) = \\ &= t^{\ell-1} (\lambda \omega_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega})(t, x) = \lambda t^{\ell-1} \omega_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega}(t, x) = \end{aligned}$$

$$= (\lambda \cdot f_{i_1, \dots, i_\ell}^w)(t, x_1, \dots, x_n) \quad \text{για κάθε}$$

$$(\lambda, x_1, \dots, x_n) \in \Delta \times B \text{ και άρα:}$$

$$f_{i_1, \dots, i_\ell}^{\lambda w} = \lambda \cdot f_{i_1, \dots, i_\ell}^w \quad \text{για κάθε } (i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^e)^* \quad (13)$$

Έστω τώρα $x = (x_1, \dots, x_n) \in B$. Από την (13) και
τους σχετικούς ορισμούς παίρνουμε:

$$F_{i_1, \dots, i_\ell}^{\lambda w}(x) = \int_0^1 f_{i_1, \dots, i_\ell}^{\lambda w}(t, x_1, \dots, x_n) dt =$$

$$= \int_0^1 (\lambda \cdot f_{i_1, \dots, i_\ell}^w)(t, x_1, \dots, x_n) dt \stackrel{\substack{\text{γιατί το } \lambda \text{ και το } w \\ \text{είναι ανεξάρτητα}}}{=}$$

$$= \lambda \cdot \int_0^1 f_{i_1, \dots, i_\ell}^w(t, x_1, \dots, x_n) dt =$$

$$= (\lambda \cdot F_{i_1, \dots, i_\ell}^w)(x), \quad \forall x \in B. \text{ Άρα έχουμε:}$$

$$F_{i_1, \dots, i_\ell}^{\lambda w} = \lambda \cdot F_{i_1, \dots, i_\ell}^w \quad \text{για κάθε } (i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^e)^* \quad (14)$$

Από την (14) και τη στοιχειώδη πράξη των διαφορίων μπορούμε να πάρουμε:

$$\begin{aligned} (-1)^{q-1} F_{i_1, \dots, i_\ell}^{\lambda \omega} x^{i_0} \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_{q-1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_\ell} &= \\ = \lambda \cdot (-1)^{q-1} F_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega} x^{i_0} \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_{q-1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_\ell} \end{aligned}$$

για κάθε $(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^0)^*$ (15).

Από την (15) τώρα παίρνουμε:

$$I(\lambda \omega) =$$

$$\sum_{(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^0)^*} \sum_{q=1}^{\ell} (-1)^{q-1} F_{i_1, \dots, i_\ell}^{\lambda \omega} x^{i_0} \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_{q-1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_\ell} =$$

$$= \lambda \cdot \sum_{(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^0)^*} \sum_{q=1}^{\ell} F_{i_1, \dots, i_\ell}^{\omega} x^{i_0} \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_{q-1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_\ell}$$

$$= \lambda \cdot I(\omega) \quad (16).$$

Από την (9) και (16) έπεται τώρα ότι η I είναι γραμμική συνάρτηση ■

Είπαμε πλέον έτοιμοι τώρα ν' αποδείξουμε
το Λήμμα του Ροϊνσατέ.

Απόδειξη του Λήμματος του Ροϊνσατέ.

Σεικώνουμε στη σελίδα 90)

Θεωρούμε μια αρχή το χούδα l -μορφής στο
 A με $1 \leq l < n$, των ω .

Θα δείξουμε αρχικά ότι ισχύει:

$$\omega = I(\partial\omega) + \partial(I\omega). \quad (1).$$

Θα δείξουμε την (1) διακρίνοντας περιπτώσεις.

1^η περίπτωση.

Έστω ότι

$$\omega = \omega_1^w \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^l, \text{ όπου}$$

$$\omega_1^w: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ είναι για } C^\infty\text{-απειρόωτη. (*)}$$

Τώρα με βάση τους παραπάνω συμβολισμούς έχουμε

$$\omega_j = j \text{ για κάθε } j = 1, \dots, l.$$

(*) γράφουμε ω_1^w θέλοντας να δείξουμε ότι ήμερα είδαμε
από την διαφορετική μορφή ω

θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f_{1,2,\dots,l}^{\omega} : \Delta \times B \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο:}$$

$$f_{1,\dots,l}^{\omega}((t, x_1, \dots, x_n)) = t^{l-1} \cdot \omega_1^{\omega}(t(x_1, \dots, x_n)) = t^{l-1} \cdot \omega_1^{\omega}(tx) \text{ για}$$

κάθε $(t, x_1, \dots, x_n) \in \Delta \times B$, όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$.

ορίζουμε την συνάρτηση $F_{1,\dots,l}^{\omega} : B \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$F_{1,\dots,l}^{\omega}(x) = \int_0^1 f_{1,\dots,l}^{\omega}((t, x_1, \dots, x_n)) dt \text{ για κάθε}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in B.$$

Έχουμε τώρα:

$$I(\omega) = \sum_{a=1}^l (-1)^{a-1} F_{1,\dots,l}^{\omega} \cdot x^a \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^a} \wedge \dots \wedge dx^l \in \mathbb{R}.$$

Από τον ορισμό του διαφορίσιμου για διαφορίσιμες μορφές,

έχουμε:

$$d(I(\omega)) = \sum_{a=1}^l d((-1)^{a-1} F_{1,\dots,l}^{\omega} \cdot x^a) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^a} \wedge \dots \wedge dx^l \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η συνάρτηση $\alpha : C(B) \rightarrow \prod_{p \in B} \mathcal{P}(\mathbb{R}_p^{\mathbb{N}})$

είναι γραμμική (όπως έχουμε δείξει) έπεται ότι:

$$\alpha((-1)^{a+1} F_{1,\dots,l}^w \cdot x^a) = (-1)^{a+1} \alpha(F_{1,\dots,l}^w \cdot x^a) \text{ για}$$

κάθε $a=1,\dots,l$. (3)

Από τον τύπο του διαφορίσιμου του γινόμενου δυο συναρτήσεων παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \alpha(F_{1,\dots,l}^w \cdot x^a) &= \alpha F_{1,\dots,l}^w \cdot x^a + F_{1,\dots,l}^w \cdot \alpha x^a = \\ &= x^a \cdot \alpha F_{1,\dots,l}^w + F_{1,\dots,l}^w \cdot \alpha x^a \quad (4), \text{ για κάθε } a=1,\dots,l. \end{aligned}$$

Από τις (3) και (4) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &\alpha((-1)^{a+1} F_{1,\dots,l}^w \cdot x^a) \wedge \overset{\uparrow}{\alpha x^1} \wedge \dots \wedge \overset{\uparrow}{\alpha x^a} \wedge \dots \wedge \alpha x^l = \\ &= (-1)^{a+1} (x^a \alpha F_{1,\dots,l}^w + F_{1,\dots,l}^w \cdot \alpha x^a) \wedge \overset{\uparrow}{\alpha x^1} \wedge \dots \wedge \overset{\uparrow}{\alpha x^a} \wedge \dots \wedge \alpha x^l = \\ &= \dots \wedge \overset{\uparrow}{(-1)^{a+1} F_{1,\dots,l}^w \cdot \alpha x^a} \wedge \overset{\uparrow}{\alpha x^1} \wedge \dots \wedge \overset{\uparrow}{\alpha x^a} \wedge \dots \wedge \alpha x^l \quad (5) \\ &+ (-1)^{a+1} x^a \alpha F_{1,\dots,l}^w \wedge \overset{\uparrow}{\alpha x^1} \wedge \dots \wedge \overset{\uparrow}{\alpha x^a} \wedge \dots \wedge \alpha x^l. \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι:

$$\begin{aligned} &\alpha x^a \wedge \overset{\uparrow}{\alpha x^1} \wedge \dots \wedge \overset{\uparrow}{\alpha x^a} \wedge \dots \wedge \alpha x^l = \wedge \\ &= (-1) \cdot \alpha x^1 \wedge \alpha x^a \wedge \alpha x^2 \wedge \dots \wedge \alpha x^{a-1} \wedge \alpha x^a \wedge \alpha x^{a+1} \wedge \dots \wedge \alpha x^l = \\ &= (-1)^2 \alpha x^1 \wedge \alpha x^2 \wedge \alpha x^a \wedge \dots \wedge \alpha x^{a-1} \wedge \overset{\uparrow}{\alpha x^a} \wedge \alpha x^{a+1} \wedge \dots \wedge \alpha x^l = \\ &= \dots = (-1)^{a-1} \alpha x^1 \wedge \alpha x^2 \wedge \dots \wedge \alpha x^{a-1} \wedge \alpha x^a \wedge \alpha x^{a+1} \wedge \dots \wedge \alpha x^l = \end{aligned}$$

$$= (-1)^{a-1} dx' \wedge \dots \wedge dx^l (5)$$

(108)

Από την (5) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & (-1)^{a-1} F_{1,\dots,l}^{\omega} \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^a \wedge \dots \wedge dx^l \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^l \\ &= (-1)^{a-1} F_{1,\dots,l}^{\omega} \cdot (-1)^{a-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^l = F_{1,\dots,l}^{\omega} \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^l \quad (6) \end{aligned}$$

Από την (6) προφανώς έχουμε τώρα:

$$dF_{1,\dots,l}^{\omega} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_{1,\dots,l}^{\omega}}{\partial x_j} dx^j \quad (7)$$

Από την (7) έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned} & dF_{1,\dots,l}^{\omega} \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^a \wedge \dots \wedge dx^l = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_{1,\dots,l}^{\omega}}{\partial x_j} dx^j \right) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^a \wedge \dots \wedge dx^l = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_{1,\dots,l}^{\omega}}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^a \wedge \dots \wedge dx^l \quad (8) \end{aligned}$$

Υπολείπεται τώρα το $dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^a \wedge \dots \wedge dx^l$
για $j \in \{1, \dots, n\}$ και $a \in \{1, \dots, l\}$.

Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

α) Έστω $a \in \{1, \dots, l\}$. Αν $j \in \{1, \dots, l\} \setminus \{a\}$, τότε
 $\partial x^j \wedge \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^a \wedge \dots \wedge \partial x^l = 0$ από γνωστό

πρόταση
β) Αν $j=a$, τότε όπως πριν έχουμε:
 $\partial x^j \wedge \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^a \wedge \dots \wedge \partial x^l = (-1)^{a-1} \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^l$

γ) Αν $j \in \{l+1, \dots, n\}$, τότε:
 $\partial x^j \wedge \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^a \wedge \dots \wedge \partial x^l =$
 $= (-1)^a \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^{a-1} \wedge \partial x^j \wedge \partial x^{a+1} \wedge \dots \wedge \partial x^l, /9)$

Από 74 /9 παίρνουμε:
 $H)^{a-1} x^a \frac{\partial F_{1, \dots, l}^\omega}{\partial x^a} \wedge \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^a \wedge \dots \wedge \partial x^l =$
 $= x^a \frac{\partial F_{1, \dots, l}^\omega}{\partial x^a} \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^l +$

$$+ \sum_{j=l+1}^n x^j \frac{\partial F_{1, \dots, l}^\omega}{\partial x^j} \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^{a-1} \wedge \partial x^j \wedge \partial x^{a+1} \wedge \dots \wedge \partial x^l. \quad (10)$$

Από 74 (5), (6) και (10) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 & \partial \left((-1)^{q-1} F_{1,\dots,l}^{\omega} \cdot x^q \right) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^a \wedge \dots \wedge dx^l = \\
 & = F_{1,\dots,l}^{\omega} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^l + x^q \frac{\partial F_{1,\dots,l}^{\omega}}{\partial x_a} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^l + \\
 & + \sum_{j=l+1}^n x^q \frac{\partial F_{1,\dots,l}^{\omega}}{\partial x_j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{q-1} \wedge dx^j \wedge dx^{q+1} \wedge \dots \wedge dx^l \\
 & = \left(F_{1,\dots,l}^{\omega} + x^q \frac{\partial F_{1,\dots,l}^{\omega}}{\partial x_a} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^l + \\
 & + \sum_{j=l+1}^n x^q \frac{\partial F_{1,\dots,l}^{\omega}}{\partial x_j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{q-1} \wedge dx^j \wedge dx^{q+1} \wedge \dots \wedge dx^l \quad (11)
 \end{aligned}$$

Ans 715 (27) uq1 (117) naiprouye:

$$\begin{aligned}
 \partial (I(\omega)) &= \left(l \cdot F_{1,\dots,l}^{\omega} + \sum_{a=1}^l x^a \frac{\partial F_{1,\dots,l}^{\omega}}{\partial x_a} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^l + \\
 &= \left(l \cdot F_{1,\dots,l}^{\omega} + \sum_{a=1}^l x^a \frac{\partial F_{1,\dots,l}^{\omega}}{\partial x_a} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^l + \\
 &+ \sum_{a=1}^l \sum_{j=l+1}^n x^a \frac{\partial F_{1,\dots,l}^{\omega}}{\partial x_j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{a-1} \wedge dx^j \wedge dx^{a+1} \wedge \dots \wedge dx^l \quad (12)
 \end{aligned}$$

Επών η παραπάνω ιδιότητα (12) όταν γράφουμε:

$dx' \wedge \dots \wedge dx^{a-1} \wedge dx^j \wedge dx^{a+1} \wedge \dots \wedge dx^l$, όταν
 $a=1$ εννοούμε το γινόμενο $dx^j \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^l$, ενώ
 εάν $a=l$ εννοούμε το γινόμενο $dx' \wedge \dots \wedge dx^{l-1} \wedge dx^j$.

Εξ' ορισμού έχουμε τώρα:

$$d\omega = d\omega_i^w \wedge dx' \wedge \dots \wedge dx^l \quad (13).$$

Από γνωστή πρόταση έχουμε:

$$d\omega_i^w = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_i^w}{\partial x_j} dx^j \quad (14)$$

Από την (14) παίρνουμε:

$$d\omega_i^w \wedge dx' \wedge \dots \wedge dx^l = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_i^w}{\partial x_j} dx^j \right) \wedge dx' \wedge \dots \wedge dx^l$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_i^w}{\partial x_j} dx^j \wedge dx' \wedge \dots \wedge dx^l =$$

$$= \sum_{j=l+1}^n \frac{\partial \omega_i^w}{\partial x_j} dx^j \wedge dx' \wedge \dots \wedge dx^l \quad (\Rightarrow)$$

(12)

(112)

$$\partial \omega_i^w \wedge \partial x' \wedge \dots \wedge \partial x^l =$$

$$= \sum_{j=l+1}^n (-1)^l \frac{\partial \omega_i^w}{\partial x_j} \partial x' \wedge \dots \wedge \partial x^l \wedge \partial x^j \quad (15),$$

αφού εύκολα προκύπτει ότι:

$$\partial x^j \wedge \partial x' \wedge \dots \wedge \partial x^l = (-1)^l \partial x' \wedge \dots \wedge \partial x^l \wedge \partial x^j$$

επαγωγικά. Από την (15) και (13) έχουμε:

$$\partial \omega = \sum_{j=l+1}^n (-1)^l \frac{\partial \omega_i^w}{\partial x_j} \partial x' \wedge \dots \wedge \partial x^l \wedge \partial x^j \quad (16).$$

Σταθεροποιούμε τώρα ένα $j_0 \in \{l+1, \dots, n\}$. Θα υπολογίσουμε τώρα την

$$I \left((-1)^l \frac{\partial \omega_i^w}{\partial x_{j_0}} \partial x' \wedge \dots \wedge \partial x^l \wedge \partial x^{j_0} \right) \quad (17).$$

Θέτουμε για απλότητα $\omega_{j_0}^w = (-1)^l \frac{\partial \omega_i^w}{\partial x_{j_0}}$

Επίσης πρέπει να υπολογίσουμε το

$$I \left(\omega_{j_0}^w \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^l \wedge \partial x^{j_0} \right) \quad (18)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f_{j_0}^w : \Delta \times B \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπος}$$

$$\begin{aligned} f_{j_0}^w(t, x_1, \dots, x_n) &= t^l \cdot \omega_{j_0}^w(t(x_1, \dots, x_n)) \\ &= t^l \cdot \omega_{j_0}^w(tx) \text{ για κάθε } (t, x_1, \dots, x_n) \in \Delta \times B, \\ &\text{όπου } x = (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $F_{j_0}^w : B \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$F_{j_0}^w(x) = \int_0^1 f_{j_0}^w(t, x_1, \dots, x_n) dt \text{ για κάθε } x = (x_1, \dots, x_n) \in B.$$

Με βάση τους προηγούμενους ορισμούς έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned} I \left(\omega_{j_0}^w \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^l \wedge \partial x^{j_0} \right) &= \\ &= \sum_{a=1}^l (-1)^{a-1} F_{j_0}^w \cdot x^a \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^{\hat{a}} \wedge \dots \wedge \partial x^l \wedge \partial x^{j_0} + \\ &\quad + (-1)^l F_{j_0}^w \cdot x^{j_0} \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^l \quad (19). \end{aligned}$$

Από την (16) και χρησιμοποιώντας το λήμμα που
δείξαμε ότι η συνάρτηση I είναι γραμμική παίρνουμε:

$$I(\omega) = \sum_{j=l+1}^n \mathbf{I} \left((-1)^l \frac{\partial \omega_j^\omega}{\partial x_j} \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^l \wedge \partial x^j \right) \quad (20)$$

$$\text{Θέτουμε } \omega_j^\omega = (-1)^l \frac{\partial \omega_j^\omega}{\partial x_j} \text{ για κάθε } j = l+1, \dots, n \quad (21)$$

Όπως στην (19) παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \left(\omega_j^\omega \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^l \wedge \partial x^j \right) &= \\ &= \sum_{a=1}^l (-1)^{a-1} F_j^\omega \cdot x^a \cdot \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^a \wedge \dots \wedge \partial x^l \wedge \partial x^j \\ &\quad + (-1)^l F_j^\omega \cdot x^j \cdot \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^l \end{aligned} \quad \text{για κάθε } j = l+1, \dots, n. \quad (22)$$

Αντικαθιστώντας από τις (21) και (22) στην (20) παίρνουμε:

$$I(\omega) = \sum_{j=l+1}^n \sum_{a=1}^l (-1)^{a-1} F_j^\omega x^a (\partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^a \wedge \dots \wedge \partial x^l \wedge \partial x^j)$$

$$+ \sum_{j=l+1}^n (-1)^l F_j^\omega x^j (\partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^l) \quad (23)$$

Εφαρμόζουμε στη συνέχεια το πρόβλημα 2, βελίδα 168 του βιβλίου Απειροστικός λογισμός σε πολλές μεταβλητές, Τυλέμαχου Χατζηαφρότη,

Εφαρμόζουμε αυτό το πρόβλημα για $f = f_{1, \dots, l}^\omega$ και $F = F_{1, \dots, l}^\omega$, αφού όλες οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή αυτού του προβλήματος ικανοποιούνται και παίρνουμε:

$$\frac{\partial F_{1, \dots, l}^\omega}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \frac{\partial f_{1, \dots, l}^\omega}{\partial x_j}((t, x_1, \dots, x_n)) dt \quad \text{για}$$

κάθε $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B$. (24), για κάθε $j = 1, \dots, n$.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση

$g: \Delta \times B \rightarrow A$ με τύπο:

$$g(t, x_1, \dots, x_n) = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = tx,$$

όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ για κάθε $(t, x_1, \dots, x_n) \in \Delta \times B$.

Από τον ορισμό της $f_{1, \dots, l}^\omega$ στην βελίδα 21 παίρνουμε:

$$f_{1, \dots, l}^\omega((t, x_1, \dots, x_n)) = t^{l-1} \cdot (\omega_1^\omega \circ g)((t, x_1, \dots, x_n)) \quad (25)$$

για κάθε $(t, x_1, \dots, x_n) \in \Delta \times B$.

Από τη (22) προφανώς έχουμε ότι

$$\frac{\partial f_{1,\dots,l}^{\omega}}{\partial x_j}((t, x_1, \dots, x_n)) = t^{l-1} \frac{\partial (\omega_1^{\omega \circ g})}{\partial x_j}((t, x_1, \dots, x_n))$$

για κάθε $(t, x_1, \dots, x_n) \in \Delta \times B$ (26), για κάθε $j=1, \dots, n$.

Εφαρμόζουμε τώρα τον κανόνα της αλυσίδας (διαφορίσιμότητα σύνθεσης συναρτήσεων) για την συνάρτηση $\omega_1^{\omega \circ g}$ (βλ. και στη σελίδα 119, στο υπότιτλο της σελίδας στο βιβλίο του Χατζηαφρόντη που είναι

παράδειγμα για $f = \omega_1^{\omega}$ για $i=1, \dots, n$ και για την

παράδειγμα συνάρτησης g . Προφανώς για τις μερικές παραγώγους της g έχουμε $f_i = f + i$, γιατί $i=1$ και για την

$g_u: \Delta \times B \rightarrow \mathbb{R}$ $g_u((t, x_1, \dots, x_n)) = t x_u$, για

κάθε $u=1, \dots, n$. Εφαρμόζονται λοιπόν αυτές τις παραγώγους

$$\frac{\partial (\omega_1^{\omega \circ g})}{\partial x_j}((t, x_1, \dots, x_n)) = t \cdot \frac{\partial \omega_1^{\omega}}{\partial x_j}(t x)$$

για κάθε $(t, x_1, \dots, x_n) \in \Delta \times B$, όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$ και για κάθε $j=1, \dots, n$. (27).

Από τις (24), (26) και (27) παίρνουμε ότι:

$$\frac{\partial F_{1, \dots, l}^w}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 t^l \cdot \frac{\partial w_1^w}{\partial x_j}(tx) dt \quad \text{για}$$

κάθε $j=1, \dots, n$ (28).

Από τον ορισμό της F_j^w για $j=l+1, \dots, n$,

παίρνουμε:

$$F_j^w(x) = \int_0^1 f_j^w((t, x_1, \dots, x_n)) dt \quad \text{για}$$

κάθε $x=(x_1, \dots, x_n) \in B$. (29)

Αν παρατηρήσουμε στην (29) από τον ορισμό της f_j^w

παίρνουμε:

$$F_j^w(x) = \int_0^1 t^l w_j^w(tx) dt \quad \text{για κάθε}$$

$j=l+1, \dots, n$, + ~~για~~ $x=(x_1, \dots, x_n) \in B$. (30).

Από τον ορισμό της $w_j^w = (-1)^l \frac{\partial w_1^w}{\partial x_j}$ για κάθε $j=l+1, \dots, n$

παίρνουμε από την (30):

$$F_j^w(x) = \int_0^1 t^l (-1)^l \frac{\partial w_1^w}{\partial x_j}(tx) dt \quad \text{για } u \neq 0$$

$x \in B, \forall j = l+1, \dots, n$ (31).

Από 74 (28) και (31) προκύπτει ότι:

$$F_j^w(x) = (-1)^l \cdot \frac{\partial F_{1, \dots, l}^w}{\partial x_j}(x) \quad \text{για } u \neq 0$$

$x \in B, \forall j = l+1, \dots, n$. (32). Από 74 (32) προκύπτει ότι

$$F_j^w = (-1)^l \cdot \frac{\partial F_{1, \dots, l}^w}{\partial x_j} \quad \text{όσο } B \text{ για } u \neq 0$$

$j = l+1, \dots, n$ (33).

Από 74 (33) προκύπτει: για $j = l+1, \dots, n, q \in \{1, \dots, l\}$

$$\begin{aligned} & (-1)^{q-1} F_j^w x^q \cdot (\partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^q \wedge \dots \wedge \partial x^l \wedge \partial x^j) = \\ & = (-1)^{q-1} F_j^w x^q (-1)^{l-1} (\partial x^j \wedge \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^q \wedge \dots \wedge \partial x^l) \\ & = (-1)^{q-1} F_j^w x^q (-1)^{l-1} (-1)^{q-1} (\partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^{q-1} \wedge \partial x^j \wedge \partial x^{q+1} \wedge \dots \wedge \partial x^l) \\ & = (-1)^{2(q-1)} (-1)^{l-1} (-1)^l \frac{\partial F_{1, \dots, l}^w}{\partial x_j} x^q (\partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^{q-1} \wedge \partial x^j \wedge \partial x^{q+1} \wedge \dots \wedge \partial x^l) \\ & = (-1) \cdot \frac{\partial F_{1, \dots, l}^w}{\partial x_j} x^q (\partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^{q-1} \wedge \partial x^j \wedge \partial x^{q+1} \wedge \dots \wedge \partial x^l) \end{aligned} \quad (34)$$

Για να πάρουμε την (34) παρακάτω χρησιμοποιούμε
το ότι :

$$\partial x' \wedge \dots \wedge \partial x^a \wedge \dots \wedge \partial x^l \wedge \partial x^j =$$

$$= (-1)^{l-1} \partial x^j \wedge \partial x' \wedge \dots \wedge \partial x^a \wedge \dots \wedge \partial x^l, \text{ και αυτό γιατί}$$

κάθε φορά που το ∂x^j αντιστρέφεται με κάθε ένα
από τους παράγοντες ∂x^i για $i=1, \dots, l$ (επτός από q)
το εσωτερικό γινόμενο πολλαπλασιάζεται επί (-1) και
αυτό συμβαίνει $l-1$ φορές.

Επίσης χρησιμοποιούμε το ότι :

$$\partial x^j \wedge \partial x' \wedge \dots \wedge \partial x^a \wedge \dots \wedge \partial x^l =$$

$$= (-1)^{q-1} \partial x' \wedge \dots \wedge \partial x^{a-1} \wedge \partial x^j \wedge \partial x^{a+1} \wedge \dots \wedge \partial x^l,$$

αφού για παράμοιο λόγος όπου τώρα κάποιος $a-1$
το πλήθος αντιστρέφεται.

Αθροίζουμε τώρα την (34) επί όλα τα $a=1, \dots, l$

και όλα τα $j=l+1, \dots, n$ και παίρνουμε:

$$\sum_{j=l+1}^n \sum_{a=1}^l (-1)^{a+j} F_j^w x^a (\partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^a \wedge \dots \wedge \partial x^l \wedge \partial x^j) =$$

$$= \sum_{j=l+1}^n \sum_{a=1}^l (-1)^{a+j} \frac{\partial F_{1,\dots,l}}{\partial x_j} x^a (\partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^a \wedge \dots \wedge \partial x^j \wedge \partial x^{a+1} \wedge \dots \wedge \partial x^l) \quad (35)$$

Αποδείξουμε τώρα ότι (12) και (22) και λαμβάνοντας υπόψη την (35) ισχύουν:

$$\partial(I(\omega)) + I(\partial(\omega)) =$$

$$= \left(l \cdot F_{1,\dots,l}^w + \sum_{a=1}^l x^a \cdot \frac{\partial F_{1,\dots,l}}{\partial x_a} \right) \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^l +$$

$$+ \sum_{j=l+1}^n (-1)^{l+j} F_j^w x^j (\partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^l) \quad (36)$$

Αντίστοιχα, βάζοντας στο (33) στην (36) ισχύουν:

$$\partial(I(\omega)) + I(\partial(\omega)) =$$

$$= \left(l \cdot F_{1,\dots,l}^w + \sum_{j=1}^n x^j \cdot \frac{\partial F_{1,\dots,l}}{\partial x_j} \right) \partial x^1 \wedge \dots \wedge \partial x^l \quad (37)$$

Θεωρούμε την αρχική συνάρτηση $\omega_1^{\omega}: A \rightarrow \mathbb{R}$ από την οποία ορίζεται η διαφορική μορφή ω , η οποία είναι τάξης C^∞ από την υπόθεση.

A , βεβαιώνουμε αν $p_0 = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in B$.

Από το p_0 ορίζεται η συνάρτηση

$$g_{p_0}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ με τύπο:}$$

$$g_{p_0}(t) = t p_0 = t (p_1, \dots, p_n) = (t p_1, \dots, t p_n) \text{ για}$$

κάθε $t \in [0, 1]$.

Προφανώς για κάθε $t \in [0, 1]$, το

$$t \cdot p_0 = (1-t) \cdot 0 + t \cdot p_0 \in [0, p_0] \subseteq B \subseteq A,$$

αφού το B είναι ασυμφορφο ως προς το 0 και $p_0 \in B$ από την υπόθεση. Άρα ορίζεται το

$$g_{p_0}(t) = \omega_1^{\omega}(t p_0) \text{ για κάθε } t \in [0, 1].$$

Αφού λοιπόν $g_{p_0}: [0, 1] \rightarrow B$ και $\omega_1^{\omega}: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $B \subseteq A$, ορίζεται κατ'εξοχή η σύνθετη συνάρτηση

$$\omega_1^{\omega} \circ g_{p_0}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Από την υπόθεση που έχουμε κάνει στην βελίδα 93
 έχουμε ακόμη ότι $\gamma_{p_0}: \Delta \rightarrow A$, επαγερνεται στο
 $\Delta \supseteq [0, 1]$ και άρα ορίζεται καλά η συνάρτηση
 $\omega_1^w \circ \gamma_{p_0}: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Εφόσον γ_{p_0} είναι C^∞ στο Δ και
 ω_1^w είναι C^∞ στο A , έπεται ότι η
 $\omega_1^w \circ \gamma_{p_0}$ είναι απείρως παραγωγίσιμη στο Δ και
 φανερό είναι μία πραγματική συνάρτηση, πραγματικής
 μεταβλητής. Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση

$h: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $h(t) = t^{\ell} \cdot (\omega_1^w \circ \gamma_{p_0})(t)$ για
 κάθε $t \in \Delta$. Προφανώς η h είναι C^∞ , διότι
 είναι μία πραγματική συνάρτηση, μιας πραγματικής
 μεταβλητής και απείρως παραγωγίσιμη στο Δ .

Άρα η h' είναι και αυτή απείρως παραγωγίσιμη
 στο Δ . Από τον τύπο ορισμού της h , υπολογίζουμε:

$$h'(t) = (t^{\ell} \cdot (\omega_1^w \circ \gamma_{p_0})(t))' = (t^{\ell})' \cdot (\omega_1^w \circ \gamma_{p_0})(t) +$$

$$+ t^{\ell} \cdot (\omega_1^w \circ \gamma_{p_0})'(t) =$$

$$= \ell \cdot t^{\ell-1} (\omega_1^w \circ g_{p_0})(t) + t^{\ell} (\omega_1^w \circ g_{p_0})'(t) \quad \text{για} \\ \text{κάθε } t \in \Delta, (36).$$

Αν $(g_{p_0})_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για $j=1, \dots, n$ είναι οι μεριχές
 συναρτήσεις της g_{p_0} , τότε $(g_{p_0})_j(t) = t p_j$ για κάθε
 $j=1, \dots, n$ και άρα $(g_{p_0})'_j(t) = p_j$ για κάθε $j=1, \dots, n$ (37).

Εφαρμόζουμε τώρα τον τύπο (2) για την
 διαφορίση σύνθεσης συναρτήσεων στο κάτω μέρος της σελίδας
 208 του βιβλίου: (Ανεροστηνός Νομισμός σε νομίσματα
 μεταβλητές, Τυτ έμαχου Χαρτυναφράτη) και έχουμε:

$$\begin{aligned} (\omega_1^w \circ g_{p_0})'(t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_1^w}{\partial x_j}(g_{p_0}(t)) \cdot (g_{p_0})'_j(t) \quad (37) \\ &= \sum_{j=1}^n p_j \cdot \frac{\partial \omega_1^w}{\partial x_j}(t p_0) \quad (38). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στο (38) στην (36) παίρνουμε:

$$h'(t) = \ell \cdot t^{\ell-1} \omega_1^{\omega}(t p_0) + t^{\ell} \left(\sum_{j=1}^n p_j \cdot \frac{\partial \omega_1^{\omega}}{\partial x_j}(t p_0) \right)$$

για κάθε $t \in \Delta$. (39)

Οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στην (39) είναι προφανώς τάξης C^{∞} όλες (αφού οι ω_1^{ω} είναι τάξης C^{∞}). Άρα προφανώς είναι όλες και συνεχείς ως προς t . Άρα ορίζεται το ολοκλήρωμα Riemann όλων των συναρτήσεων (ως προς t) στην (39).
~~Άρα~~ → Στο $[0, 1]$ και άρα στο (39) έχουμε:

$$\int_0^1 h'(t) dt = \int_0^1 \left(\ell \cdot t^{\ell-1} \omega_1^{\omega}(t p_0) + t^{\ell} \left(\sum_{j=1}^n p_j \cdot \frac{\partial \omega_1^{\omega}}{\partial x_j}(t p_0) \right) \right) dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 t^{l-1} \omega_1^w(t p_0) dt + \int_0^1 \sum_{j=1}^n t^l p_j \cdot \frac{\partial \omega_1^w}{\partial x_j}(t p_0) dt \\
 &= l \cdot \int_0^1 t^{l-1} \omega_1^w(t p_0) dt + \sum_{j=1}^n p_j \cdot \int_0^1 t^l \frac{\partial \omega_1^w}{\partial x_j}(t p_0) dt \quad (40)
 \end{aligned}$$

Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του
ανειρροδισμού λογισμού έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 h'(t) dt &= h(1) - h(0) = l \cdot (\omega_1^w \circ g_{p_0})(1) - \\
 &- l \cdot (\omega_1^w \circ g_{p_0})(0) = \omega_1^w(g_{p_0}(1)) = \omega_1^w(p_0) \quad (41).
 \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της συνάρτησης $F_{1, \dots, l}^w$ έχουμε:

$$F_{1, \dots, l}^w(p_0) = \int_0^1 t^{l-1} \omega_1^w(t p_0) dt \quad (42).$$

Από την σχέση (28) παίρνουμε:

$$\frac{\partial F_{1,\dots,l}^w}{\partial x_j}(p_0) = \int_0^1 t^l \frac{\partial \omega_1^w}{\partial x_j}(tp_0) dt \quad \text{για}$$

κάθε $j=1,\dots,n$ (42).

Επειδή $x^j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η j -προβολή για $j=1,\dots,n$ έχουμε:

$$x^j(p_0) = p_j \quad \text{για κάθε } j=1,\dots,n \quad (43).$$

Αντικαθιστώντας από τις (41), (42), (43) και (44) στην (40) παίρνουμε:

$$\omega_1^w(p_0) = l \cdot F_{1,\dots,l}^w(p_0) + \sum_{j=1}^n x^j(p_0) \cdot \frac{\partial F_{1,\dots,l}^w}{\partial x_j}(p_0) =$$

από τον ορισμό των αλγεβρικών πράξεων πραγματικών συναρτήσεων

$$\left(l \cdot F_{1,\dots,l}^w + \sum_{j=1}^n x^j \cdot \frac{\partial F_{1,\dots,l}^w}{\partial x_j} \right) (p_0) \quad (45).$$

(127)

Επειδή το $\mathbb{P}_0$ είναι γνήσια θερονομωμένο στοιχείο του B (που ορίζεται στη βελίδα 93) έχουμε ότι:

$$\omega_1^w(x) = \left(\ell \cdot F_{1,\dots,\ell}^w + \sum_{j=1}^n x_j \cdot \frac{\partial F_{1,\dots,\ell}^w}{\partial x_j} \right)(x)$$

για κάθε $x \in B$ (46).

Ας θεωρήσουμε τώρα w να είναι ο περιορισμός της w στο B .

Από τις (37) και (46) παίρνουμε τώρα ότι:

$$\partial(I(w)) + I(\partial(w)) = w \text{ στο } B. \quad (47)$$

2η περίπτωση
Εντελώς ανάλογα με την (47) αποδεικνύεται το αποτέλεσμα αν αντί για την w θεωρήσουμε μία

διαφορικη μορφή $\eta = \eta_1 \cdot \partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_\ell}$ για

$\eta_1: A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση τάξης C^∞ και

$i_1, i_2, \dots, i_\ell \in \mathbb{N}$ με $i_1 < i_2 < \dots < i_\ell$ και $i_\ell \leq n$.

Όπως έχουμε δείξει οι συναρτήσεις ∂ και I είναι γραμμικές. Έτσι οι συναρτήσεις $\partial \circ I$ και

$I \circ \partial$ είναι γραμμικές, άρα και η συνάρτηση

$\partial \circ I + I \circ \partial$ είναι γραμμική συνθήρηση

γραμμικών συναρτήσεων

3^η περίπτωση

(128)

Εστω τώρα ω' να είναι τυχούσα διαφορική
εμφάνιση στο A . Τότε η ω' γράφεται σε τυπική
κανονική μορφή ως εξής:

$$\omega' = \sum_{(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^\ell)^*} \omega'_{i_1, \dots, i_\ell} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\ell} \quad \text{όπου}$$

$\omega'_{i_1, \dots, i_\ell} : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ -συνάρτησεις για κάθε

$$(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^\ell)^*.$$

Παρατηρούμε ότι:

Αφού η συνάρτηση $d \circ I + I \circ d$ είναι γραμμική

όπως είπαμε παραπάνω, έχουμε για τον περιορισμό

της ω' στο B το εξής:

$$(d \circ I + I \circ d)(\omega') =$$

$$(d \circ I + I \circ d) \left(\sum_{(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^\ell)^*} \omega'_{i_1, \dots, i_\ell} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\ell} \right) \underline{\underline{d \circ I + I \circ d \text{ γραμ.}}}$$

$$= \sum_{(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^\ell)^*} (d \circ I + I \circ d) (\omega'_{i_1, \dots, i_\ell} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\ell}) \quad (48)$$

(48)

(129)

Θέτουμε $h_{i_1, \dots, i_\ell} := \omega'_{i_1, \dots, i_\ell} \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_\ell}$ για
 κάθε $(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^\ell)^*$ στο αντίστοιχο (49)

Αντικαθιστώντας στο (49) στην (48) παίρνουμε:

$$(\partial \circ I + I \circ \partial)(\omega') =$$

$$= \sum_{(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^\ell)^*} (\partial \circ I + I \circ \partial)(h_{i_1, \dots, i_\ell}) =$$

$$= \sum_{(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^\ell)^*} (\partial(I(h_{i_1, \dots, i_\ell})) + I(\partial(h_{i_1, \dots, i_\ell}))) \underline{\underline{\text{λεπίπνωση 1}}}$$

$$= \sum_{(i_1, \dots, i_\ell) \in (T_n^\ell)^*} h_{i_1, \dots, i_\ell} \overset{\text{από την (49) και τον ορισμό της } \omega'}{=} \omega'. \text{ Άρα}$$

παίρνουμε ότι: $\partial(I(\omega)) + I(\partial(\omega)) = \omega$ για

το χάρη διαφορίσιμης ℓ -μορφής στο A

Η αλάνη μπορούμε να δράγουμε ότι:

$\alpha(I(\omega)) + I(\alpha(\omega)) = \omega$ για κάθε διαφορικη ℓ -μορφύ στο B .

Εδώ τώρα ω να είναι υπερίστη ℓ -μορφύ στο A .

Προφανώς ω είναι υπερίστη για στο B και άρα
 Ισχύει ότι: $\alpha(\omega) = 0$ ή επειδή I είναι

δραμική έχουμε ότι: $I(\alpha(\omega)) = 0$.

Άρα προκύπτει ότι: $\alpha(I(\omega)) = \omega$ και

για $\eta = I(\omega)$ έχουμε ότι $\alpha\eta = \omega$, δηλαδή
 η ω είναι αριθμός στο B .

Είναι εύκολο τώρα να δούμε ότι μπορούμε να δράγουμε
 το $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ όπου τα B_n είναι μια αύξουσα ακολουθία

απομετρώων, ατερόμορφων ως προς το 0 σωδίων όπου

για κάθε B_n υπάρχει $\Delta_n \subseteq [0, 1]$ ώστε:

$\Delta_n \cdot B_n \subseteq A$, δηλαδή $t \cdot b \in A$, $\forall (t, b) \in \Delta_n \times B_n$

Για κάθε πέτοιο B_n ο περιορισμός του ω στο

B_n ικανοποιεί το συμπέρασμα του λήμματος

του Poincaré. Από αυτό τέτοιο B_m παίρνουμε
 και μια $(l-1)$ -διαφορίσιμη μορφή γ_m στο B_m
 ώστε $\omega = d\gamma_m$ στο B_m . Επειδή είναι
 εύκολο να δούμε ότι ο περιορισμός της
 γ_{m+1} στο B_m είναι γ_m για κάθε $m=1,2,\dots$, έπεται ότι
 η διαφορίσιμη μορφή γ στο A
 που ορίζεται ως $\gamma(p) = \gamma_m(p)$ για κάποιο
 $m \in \mathbb{N}$: $p \in B_m$ είναι καλά ορισμένη και είναι
 τέτοια η διαφορίσιμη $(l-1)$ μορφή στο A που
 ικανοποιεί ότι $d\gamma = \omega$ και αυτό ολοκληρώνει
 την απόδειξη του Λήμματος του Poincaré. ■

Με την παραπάνω απόδειξη του Λήμματος
 του Poincaré ολοκληρώσαμε την απόδειξη των
 δύο βασικών αποτελεσμάτων αυτού του μαθήματος,
 δηλαδή το Θεώρημα του Stokes και το Λήμμα
 του Poincaré.

Για την συνέχεια θα δώσουμε μια εφαρμογή
 του Λήμματος του Poincaré.

Πριν δώσουμε την 3η εφαρμογή, ας κάνουμε μια παρατήρηση.

Παρατήρηση 2. 2.35

Αποδείξαμε το λήμμα του Ροίμσατε' για διαφορική ℓ -μορφή με $1 \leq \ell < n$.

Το αποτέλεσμα όμως ισχύει για $\ell = n$. Δηλαδή ισχύει σε αυτήν την περίπτωση η εξής διατύπωση του λήμματος του Ροίμσατε'.

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A ανοικτό και αβρόδμοφο ως προς το 0. Τότε για κάθε διαφορική n -μορφή ω στο A υπάρχει μια διαφορική $(n-1)$ -μορφή στο A η η ώστε να ισχύει: $\omega = d\eta$.

Η απόδειξη πάει όπως στο λήμμα του Ροίμσατε με τις εξής τροποποιήσεις:

Κατ' αρχήν ο τελεστής (= γραμμική συνάρτηση ορισμένη σε απειροδιάστατο διανυσματικό χώρο) I είναι γραμμικός και για $\ell = n$ από το σχετικό λήμμα.

Εάν βελίδα 109 που διακενόχε 3 περιπτώσεις
 πρέπει να διακενόχε μόνο 2 περιπτώσεις γιατί η τρίτη
 παύει να πραγματοποιείται να υφίσταται. Αυτό δίνει ότι
 δεν υπάρχει ο δεύτερος όρος του αθροίσματος όταν
 έχουμε (10), πράγμα που με την σειρά του δίνει ότι
 δεν υπάρχει το διηλεκτικό αθροίσμα όταν 16δίνεται (12).

Επειδή $l=1$, η (12) είναι η σχέση (37) που
 δίνει αμέσως ότι $\alpha(I(\omega)) = \omega$ και το
 αποτέλεσμα ισχύει για $\eta = I(\omega)$, δηλαδή $\alpha\eta = \omega$
 πάλι. Έτσι ολοκληρώνεται πλήρως η απόδειξη του
 λήμματος του Poincaré και για $l=1$.

Εφαρμογή του λήμματος του Poincaré

Εφαρμογή 2.2.36

Ας πάρουμε μια άλλη περίπτωση.
 Έστω $n=2$ και $l=1$, και $A = \mathbb{R}^2$. Έστω λοιπόν
 ω να είναι μια 1-μορφή στο $\mathbb{R}^2$

Θα εξετάσουμε εάν υπάρχει ⁽²³⁴⁾ για $(l-1)$ μορφή στο $\mathbb{R}^2$, ή θα μας πούμε ώστε να ισχύει:

$\omega = d\theta$. Προφανώς η θ θα πρέπει να είναι

$l-1 = 1-1 = 0$ -μορφή. Δηλαδή $\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

θα πρέπει να είναι για C^∞ συνάρτηση πραγματικής και ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$.

Από του λήμμα του Poincaré για να υπάρχει τέτοια θ , αρκεί να ισχύει $d\omega = 0$.

Ας δούμε λοιπόν τότε ισχύει $d\omega = 0$.

Αφού ω είναι για διαφορίτης 1-μορφή στο $\mathbb{R}^2$,

θα υπάρχουν δύο C^∞ -συνάρτησεις $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

(μοναδικές) ώστε να ισχύει: $\omega = f_1 dx' + f_2 dx''$.

Εξ' αφορμής του διαφορίτου μιας διαφορίτης μορφής έχουμε από την (1).

$$d\omega = df_1 \wedge dx' + df_2 \wedge dx'' \quad (2).$$

Από γνωστή πρόταση έχουμε τώρα :

(135)

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx^2 \quad (3) \text{ και } q_1$$

$$df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx^2 \quad (4)$$

Από την (3) έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned} df_1 \wedge dx^1 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx^2 \right) \wedge dx^1 = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx^1 \wedge dx^1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx^2 \wedge dx^1 = \\ &= 0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx^1 \wedge dx^2 = - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx^1 \wedge dx^2 \quad (5) \end{aligned}$$

Από την (4) έχουμε:

$$\begin{aligned} df_2 \wedge dx^2 &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx^2 \right) \wedge dx^2 = \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx^2 \wedge dx^2 = \end{aligned}$$

(136)

$$= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \partial x^1 \wedge \partial x^2 + 0 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \partial x^1 \wedge \partial x^2 \quad (6)$$

Αντιπαράβλεπόμενα από τις (5) και (6) έχουμε:

$$\partial \omega = - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \partial x^1 \wedge \partial x^2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \partial x^1 \wedge \partial x^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \partial x^1 \wedge \partial x^2 \quad (7)$$

Να παρατηρήσουμε ότι η (7) ισχύει γενικά.

Διότι οποιαδήποτε και αν είναι η διαφορική

1- μορφής ω στην (1) ισχύει πάντα η (7).

Έτσι η (7) μας λέει ότι:

$$\partial \omega = 0 \iff \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \quad (8)$$

Έτσι η (8) μας λέει ότι η εξίσωση $\partial \omega = 0$,

δηλαδή το να είναι η διαφορική μορφής ω κλειστή

είναι ισοδύναμο με το να ισχύει η μερική διαφορικότητα

67^η (8).

Έτσι αν πάρουμε οποιοδήποτε πεδίο C^∞ -διαφορίστων (x, y) με $x, y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

η μερική διαφορίσιμη επίλυση: $\frac{\partial x}{\partial x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_1}$ τότε

η διαφορίσιμη μορφή $\omega = x dx^1 + y dx^2$ ικανοποιεί την επίλυση $d\omega = 0$, δηλαδή η ω είναι κλειστή.

Αρα αρμόζει να βρούμε λύσεις της μερικής διαφορίσιμης επίλυσης στο δεξί μέλος της (8) για να προσδιορίσουμε κλειστές διαφορίσιμες 1-μορφές στο $\mathbb{R}^2$.

Έτσι για $f_1 = x^2$ η δεύτερη πρόβλη, δηλαδή

$$x^2((x_1, x_2)) = x_2 \quad \text{για κάθε } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ και}$$

$f_2 = x^1$ η πρώτη πρόβλη, έχουμε προφανώς ότι:

$$\frac{\partial x^2}{\partial x_2} = 1 = \frac{\partial x^1}{\partial x_1}. \quad \text{Αρα για τις διαφορίσιμες 2-μορφές}$$

$$\omega = x^2 dx^1 + x^1 dx^2, \quad \text{έχουμε } d\omega = 0.$$

Άρα, από το λήμμα του Poincaré υπάρχει μια συνάρτηση $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ τέτοια ώστε:

$d\theta = \omega$. Θα προσδιορίζουμε τώρα την θ από τον τύπο που μας δίνει το λήμμα του Poincaré,

(τύπος $(*)$ στην σελίδα 95)

Εδώ το $\ell = 1$. Άρα η ℓ -άδα $(i_1, \dots, i_\ell)$ αποτελείται από τελεστές από χώρο 1 στοιχείου το i_1 . Εξ' ορισμού $1 \leq i_1 \leq 2$

Άρα το i_1 παίρνει αριθμούς 2 τιμές αφού $i_1 \in \mathbb{N}$,

$i_1 = 1$ ή $i_1 = 2$.

Επίσης από την $(*)$ έχουμε

$$I(\omega) = \sum_{i_1=1,2} \sum_{q=1}^1 (-1)^{q-1} F_{i_1}^\omega \cdot x^{i_1} =$$

$$= (-1)^0 \cdot F_1^\omega \cdot x^1 + (-1)^0 F_2^\omega \cdot x^2 = F_1^\omega \cdot x^1 + F_2^\omega \cdot x^2 \quad (9).$$

Εξ' ορισμού έχουμε: (σελίδα 106) (για $i_1=1$)

$$F_1^\omega(x) = \int_0^1 f_1^\omega(t, x_1, x_2) dt \quad \text{για κάθε}$$

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (10).$$

Πάλι, εἰς ορίσιν ἐξοφῇ. (για $i=1$)

$$f_1^w((t, x_1, x_2)) = t^{1-1} \cdot \omega_1^w(t(x_1, x_2)) =$$

$$= x^2((tx_1, tx_2)) = tx_2, \text{ για } \forall t \in (0, 1] \text{ και } (t, x_1, x_2) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$$

Αντικαθιστώντας στο (11) στο (10) ἐξοφῇ: (11).

$$F_1^w(x) = \int_0^1 tx_2 dt = x_2 \cdot \int_0^1 t dt = x_2 \cdot \left(\frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \right) =$$

$$= x_2 \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{x_2}{2}. \text{ Άρα:}$$

$$F_1^w((x_1, x_2)) = \frac{x_2}{2}, \text{ για } \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ (12)}$$

Εἰς ορίσιν πάλι, ἐξοφῇ. για $i=2$

$$F_2^w(x) = \int_0^1 f_2^w((t, x_1, x_2)) dt \text{ για } \forall t \in$$

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ (13)}$$

Πάλι, εἰς ορίσιν ἐξοφῇ για $(i=2)$

$$f_2^w((t, x_1, x_2)) = t^{1-1} \cdot \omega_2^w(t(x_1, x_2)) =$$

$$= tx^1((tx_1, tx_2)) = tx_1, \text{ για } \forall t \in (0, 1] \text{ και } (t, x_1, x_2) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$$

(14)

(140)

Αντίστροφοι ισάμεται στο $\mathbb{R}^2$ (14) είναι (13) έχουμε:

$$F_2^w(x) = \int_0^1 t x_1 dt = x_1 \cdot \int_0^1 t dt = x_1 \cdot \left(\frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \right) =$$

$$= x_1 \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{x_1}{2} \text{ Άρα:}$$

$$F_2^w((x_1, x_2)) = \frac{x_1}{2} \text{ για κάθε } \theta \in (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / (15)$$

Αντίστροφοι ισάμεται στο $\mathbb{R}^2$ (12) και (15) είναι (9) αντίστροφοι:

$$(I(w))((x_1, x_2)) = (F_1^w \cdot x^1 + F_2^w \cdot x^2)((x_1, x_2)) =$$

$$= (F_1^w \cdot x^1)((x_1, x_2)) + (F_2^w \cdot x^2)((x_1, x_2)) =$$

$$= F_1^w((x_1, x_2)) \cdot x^1((x_1, x_2)) + F_2^w((x_1, x_2)) \cdot x^2((x_1, x_2))$$

$$= \frac{x_2}{2} \cdot x_1 + \frac{x_1}{2} \cdot x_2 = x_1 x_2 \text{ , για κάθε } \theta \in (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Άρα } \theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } \theta((x_1, x_2)) = x_1 \cdot x_2 \text{ για}$$

$$\text{κάθε } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ ισχύει } d\theta = w.$$

Επαλήθευση

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = x_2, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = x_1 \Rightarrow d\theta = x_2 dx_1 + x_1 dx_2$$

Έστω $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Έχουμε:

$$(d\theta)((x_1, x_2)) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} dx_2 \right)((x_1, x_2)) =$$

(141)

$$= \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \frac{\partial x'}{\partial x_1} \right) (x_1, x_2) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_2} \frac{\partial x^2}{\partial x_2} \right) (x_1, x_2) =$$

$$= \frac{\partial \theta}{\partial x_1} (x_1, x_2) \cdot \frac{\partial x'}{\partial x_1} (x_1, x_2) + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} (x_1, x_2) \cdot \frac{\partial x^2}{\partial x_2} (x_1, x_2) =$$

$$= x_2 \cdot \frac{\partial x'}{\partial x_1} (x_1, x_2) + x_1 \cdot \frac{\partial x^2}{\partial x_2} (x_1, x_2) =$$

$$= x^2 (x_1, x_2) \cdot \frac{\partial x'}{\partial x_1} (x_1, x_2) + x' (x_1, x_2) \cdot \frac{\partial x^2}{\partial x_2} (x_1, x_2) =$$

$$= (x^2 \cdot \frac{\partial x'}{\partial x_1}) (x_1, x_2) + (x' \cdot \frac{\partial x^2}{\partial x_2}) (x_1, x_2) =$$

$$= (x^2 \frac{\partial x'}{\partial x_1} + x' \frac{\partial x^2}{\partial x_2}) (x_1, x_2), \text{ για κάθε}$$

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \text{ Άρα: } d\theta = x^2 \frac{\partial x'}{\partial x_1} + x' \frac{\partial x^2}{\partial x_2} = \omega \text{ και}$$

έτσι προκύπτει ότι $\omega = d\theta$ και με άλλα λόγια

υποχρεωτικά που επιβεβαιώνει το λήμμα του Poincaré.

Βρήκαμε λοιπόν μια διαφορετική μορφή θ (συνάρτηση)

ώστε $\omega = d\theta$, χρησιμοποιώντας το Λήμμα (και του

τόπου που μας δίνει το λήμμα του Poincaré),

του Poincaré. Προκύπτει εδώ εύκολο το ερώτημα

εάν υπάρχουν και άλλες C^∞ συναρτήσεις $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

ώστε : $du = \omega$.

As υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει $\gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ αλληλ. C^∞ συνάρτηση $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $h \neq 0$ και $dh = \omega$.

Τότε βέβαια έχουμε: $dh = \omega = d\theta$. Αλλά, ισχύουν:

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_1} dx' + \frac{\partial h}{\partial x_2} dx'' \quad (16) \quad d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} dx' + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} dx'' \quad (17).$$

Από τις (16) και (17) προκύπτει: (αφού $dh = d\theta$)

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right) dx' + \left(\frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) dx'' = 0 \quad (18).$$

Η (18) ισχύει μόνο αν $\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial \theta}{\partial x_1}$ και $\frac{\partial h}{\partial x_2} = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \quad (19).$

Αλλά $\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = x''$ και $\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = x'$ (20).

Οι (19) και (20) μας δίνουν άμεσα ότι: $\frac{\partial h}{\partial x_1} = x''$, $\frac{\partial h}{\partial x_2} = x'$

και άρα

~~$h(x_1, x_2) = x_1 x_2 + g_1(x_2)$~~ και

$h(x_1, x_2) = x_1 x_2 + g_2(x_2)$, για κάποιο

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, όπου $g_1, g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ συναρτήσεις
ώστε η g_1 εξαρτάται μόνο από το x_2 , ενώ η g_2 μόνο
από το x_1 . Αυτό μας δίνει ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, σταθερά
αριθμός ώστε: $h(x_1, x_2) = x_1 x_2 + c, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Με άμεσο υπολογισμό για τέτοια η μαθηματική $dh = \omega$.

Αρα όλες οι συναρτήσεις $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $\Delta g = 0$ είναι αυτές

για τις οποίες υπάρχει $c \in \mathbb{R}$: $g(x_1, x_2) = x_1 x_2 + c$
για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, δηλαδή υπάρχει μια αθεώρητη
τέτοια συνάρτηση και τη βρήκαμε όλες.

Η παραπάνω αυτή εφαρμογή, ανόλογα και σε
αυτή την πολύ αυτή περίπτωση ~~αυτή την περίπτωση~~ δίνει μια

είδη της πολυπλοκότητας του θέματος του Poisson
και είδαμε την σωστή αυτή του προβλήματος με
άλλους τρόπους των μαθηματικών όπως οι μερικές
διαφορικές εξισώσεις.

Δεν θα επεξεργαστούμε άλλο σε αυτό το θέμα.

Θέλαμε απλώς να δώσουμε μια εφαρμογή αυτή του
λήμματος του Poisson και να δείξουμε τις

διασυνδέσεις που μπορούν να έχουν οι διαφορικές
μορφές με άλλους τρόπους των μαθηματικών όπως
οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που είναι ένα
από τα κυρίαρχα αντικείμενα έρευνας στη
μαθηματικά την σύγχρονη εποχή.



Βιβλιογραφία

Για τις αποδείξεις του θεωρήματος του Stokes και του Λήμματος του Poincaré καθώς και όλων των προαναφερθέντων αποτελεσμάτων που έχουμε αποδείξει στο δεύτερο μέρος των σημειώσεων έχουν χρησιμοποιηθεί αποτελέσματα από τα μαθήματα Απειροστικού Λογισμού III και Απειροστικού Λογισμού IV τα οποία μπορεί ο φοιτητής να βρει στα παρακάτω συγγραμμата

1) Ιωάννης Γιαννούλης, Σημειώσεις

Διαφοδιαστικής Ανάλυσης, Πανεπιστήμιο

Ιωαννίνων 2015 (Σημειώσεις σε ηλεκτρονική μορφή), Ελληνική Αναδυόμενη Ηλεκτρονική

Συγγραμμата και Βοηθήματα

2) Σ. Νεφρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννούλης

Απειροστικός Λογισμός (3 τόμοι), Εκδόσεις Αιθήρα,

Αθήνα 1995

3) Τη Δέμαχου Χατζηαφράτη,

Ανεκροστιαὺς λογιεὺς σε πολλές μεταβλητές,
Εκδόσεις Συλλογεία, Αθήνα 2009.

Συμπεριλαμβανομένη έχει δοθεί βιβλιογραφία για
το μάθημα στο πρώτο μέρος των συλλογών.